محاضرات التحليل 4

لطلاب السنة الثانية رياضيات

الفصل الأول

مقدمة في تبولوجيا الفضاءات الاقليدية$\mathfrak{R}^n$

نهايات و أستمرار الدوال الحقيقية في $\mathfrak{R}^n$

- **الفضاء المتجهي:**

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية تسمى جمعاً:

$$+: X \times X \dashrightarrow X \;\; ; \quad (x, y) \to x + y$$

و بعملية خارجية تسمى ضرباً بعدد حقيقي :

$$. : \mathfrak{R} \times X \dashrightarrow X \;\; ; \quad (\alpha, y) \mapsto \alpha . y$$

نقول عن X فضاء متجهي حقيقي إذا تحقق الشروط التالية:

1. أياً كان $x, y, z \in X$ فإن: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. يوجد فيX عنصر حيادي نرمز له بـ 0 (و نسميه صفر X)

$$\forall\, x \in X \;, x + 0 = 0 + x$$

3. يوجد لكل عنصر x من X نظير في X ونرمز له بـ x: $x + (-x) = (-x) + x = 0$
4. أياً كان $x, y \in X$ فإن: $x + y = y + x$

تحقق الشروط الأربعة يدل على أن $(X, +)$ زمرة تبديلية.كما أن عملية الضرب يجب أن تحقق الشروط التالية:

5. أياً كان $x, y \in X$ و أياً كان $\alpha \in \mathfrak{R}$ فإن: $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. أياً كان $x \in X$ و أياً كان $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ فإن: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. أياً كان $x \in X$ و أياً كان $\alpha, \beta \in$ فإن: $(\alpha . \beta)x = \alpha . (\beta x)$
8. أياً كان $x \in X$ فإن: $1 . x = x$

أمثلة:

1) فضاء متجهي حقيقي.
2) لنرمز بـ $X = \mathfrak{R}^n$ لمجموعة كل المرتبات n من الأعداد الحقيقية حيث

$$\mathfrak{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathfrak{R} \,, i = 1,2, \dots, n \}$$

فإذا عرفنا عمليتي الجمع و الضرب بعدد حقيقي كما يلي :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

و $\alpha(x) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

فمن السهل التحقق بأن $\Re^n$ يشكل فضاءً متجهياً حقيقياً بالنسبة لهاتين العمليتين حيث نجد

$0 = (0,0,\dots,0)$ حيادي الجمع و النظير هو $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

3) لنرمز بـ $C[a,b]$ لمجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة للمتغير الحقيقي t و المعرف على المجال المغلق $J = [a,b]$ فإذا عرفنا مجموع الدالتين $x + y$ و حاصل الضرب αx لدالة x بعدد حقيقي α بالدستورين :

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t) \quad , (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

فمن السهل التحقق بأن $C[a,b]$ يشكل فضاء متجهياً حقيقياً بالنسبة لهاتين العمليتين. أن 0 هنا هوالدالة الصفرية, أي هي الدالة الحقيقية المعرفة على J , و التي صورة كل عنصر من J وفقها هو العدد 0 ,

كما أن $-x$ هي الدالة التي قيمتها في النقطة t من J هي $-x(t)$ و سنرمز للمجموع $x + (-y)$ بالشكل $-y$.

- **فضاءات الجداء الداخلي و الفضاءات المنظمة.**

تعريف النظيم : إذا كان فضاء متجهياً حقيقياً , فإن النظيم على X هو كل دالة حقيقية غير سالبة معرفة على X بالشكل التالي : $\|.\| : X \longrightarrow \Re_+ \quad , \quad x \mapsto \|x\|$

و تحقق الشروط (موضوعات النظيم) التالية:

1) أيا كان x من X فإن : $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| = 0$
2) أيا كان x من X و أياً كان $\alpha \in \Re$ فإن : $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$
3) أيا كان x, y من X فإن : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

نسمي كل ثنائية $(X, \|.\|)$ فضاء منظماً.

تعريف الجداء الداخلي :

إذا كان X فضاء متجهياً حقيقياً , فإن الجداء الداخلي على X هو كل دالة حقيقية h معرفة على $X \times X$ بالشكل التالي : $h : X \times X \longrightarrow \Re \quad , \quad (x, y) \mapsto h(x, y) = \langle x, y \rangle$

و تحقق الشروط (موضوعات الجداء الداخلي) التالية:

1) أيا كان x من X فإن : $\langle x, x \rangle \geq 0$
2) أيا كان x من X فإن : $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, x \rangle = 0$
3) أيا كان x, y من X فإن : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4) أيا كان x, y, z من X فإن : $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

5) أيا كان x, y, z من X و أياً كان $\alpha \in \Re$ فإن : $\langle \alpha\, x, y \rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

نسمي كل ثنائية $(X, \langle \ \ , \ \ \rangle)$ فضاء الجداء الداخلي . هذا و من الممكن أن نعرف أكثر من جداء داخلي على الفضاء المتجه نفسه.

أمثلة :

1) إذا كان $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ متجهين من $\Re^n$ فيمكن التحقق من أن الدالة $\langle \ , \ \rangle : \Re^n \times \Re^n \longrightarrow \Re$ المعرفة كما يلي:

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

تعرف جداء داخلي على .

2) إذا رمزنا بـ $C([a, b], \Re)$ للفضاء المتجهي لجميع الدوال الحقيقية المعرفة والمستمرة على المجال المغلق $J = [a, b]$ و كانت دالتين f, g من $C([a, b], \Re)$ فإن الدالة

$$(f, g) \to \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t). g(t) dt$$

تعرف جداء داخلي على $C([a, b], \Re)$.

3) نعرف على النظيم التالي $||(x_1, x_2, \dots, x_n)|| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$

تحقق من أنه يحقق موضوعات النظيم.

4) لنرمز بـ l^∞ لمجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحدودة, أي إذا كانت المتتالية $x = \{x_i\}$ عنصراً من l^∞ فإن: $|x_i| \le c_x$ حيث c_x عدد حقيقي قد يتبع لـ x إلا أنه لا يتبع لـ i.

من السهل التحقق بأنه إذا زودنا بعملية جمع وفق الدستور

$$x + y = \{x_i\} + \{y_i\} = \{x_i + y_i\}$$

و عملية ضرب بعدد حقيقي محددة بالمساواة

$$\alpha x = \alpha\{x_i\} = \{\alpha x_i\}$$

فإن تشكل فضاءً متجهياً بالنسبة لهاتين العمليتين .

5) إن المساواة $||x|| = \sup_{i \in N} |x_i|$ تحدد نظيماً على l^∞ (يترك وظيفة).

مبرهنة (1) : إذا كان X فضاء جداء داخلي, و عرفنا بالمساواة $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ أيا كان x من X, فإن الدالة $x \mapsto \|x\|$ تحدد نظيماً على X. و عندئذ يحقق النظيم متراجحة شفارتز التالية :

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$$

فضلاً عن ذلك , فإن الشرط اللازم و الكافي كي تنقلب هذه المتراجحة الى مساواة صرفة, هو أن يكون العنصران x,y مرتبطين خطياً (أي أن يكون $x = 0$, أو أن يوجد عدد حقيقي موجب c بحيث يكون $y = cx$) .

ملاحظة : يمكننا التحقق من أنه أيا كان x,y في فضاء منظم فإن :

1) $|\ \|x\| - \|y\|\ | \le \|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\|$

- **الفضاء المتري**

تعريف : إذا كان X فضاء متجهياً حقيقياً , نعرف دالة المسافة d على $X \times X$ بالشكل التالي :

$$d : X \times X \longrightarrow \Re^{+}\ ,\quad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

و تحقق الشروط (موضوعات الفضاء المتري) التالية:

1) أيا كان x,y من X فإن : $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$

2) أيا كان x,y من X فإن : $d(x,y) = d(y,x)$

3) أيا كان x,y,z من X فإن : $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$

نسمي d بعداً أو مسافة على المجموعة X. أن المجموعة X التي عرفت عليها دالة المسافة d , تسمى فضاء مترياً نرمز له بـ (X,d) .

ملاحظة :

كل نظيم على فضاء متجه يحدد متركاً D على X معرفاً بالمساواة: $D(x,y) = \|x - y\|$

يسمى D متركاً مولداً من نظيم. و هكذا كل فضاء منظم هو فضاء متري.

و هذا يعني أن كل الحقائق المتعلقة بالفضاءات المترية تتحقق في الفضاءات المنظة , و بالتالي على فضاءات الجداء االداخلي .

مبرهنة (2): إذا كان D متركاً مولداً من نظيم على فضاء متجهي X , فإن

1) $D(\ x+z\ ,y+z\ )=D\ (x,y)$

2) $D(\ \alpha\ x\ ,\alpha y\ )=|\alpha|D\ (x,y)$

و ذلك أيا كان x,y,z من X و أياً كان $\alpha\in\ \Re$.

البرهان : لدينا

1) $D(x+z,y+z\ )=\|x+z-(y+z)\|=\|x-y\|=D\ (x,y)$

2) $D(\ \alpha\ x\ ,\alpha y\ )=\|\alpha\ x-\alpha y\|=|\alpha|\|x-y\|=|\alpha|D\ (x,y)$

و هو المطلوب.

إذا لم يحقق متركاً احدى المساوتين (1) و (2) من النظرية السابقة , فلا يمكن أن يكون هذا المترك ناتجاً عن نظيم باستخدام المساواة $\|x-y\|\ =\ (\ x\ ,y\ )$. و بعبارة أخرى ليس من الضروري أن يكون كل فضاء متجه متري فضاء منظماً.

- **الفضاء الاقليدي $\Re^n$**

تعريف : الفضاء الاقليدي ذو البعد n هو المجموعة

$$\Re^n=\{\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\ \ ,x_i\in\Re\ \ ,i=1,2,\dots,n\ \}$$

المزودة بعملتي الجمع و الضرب بعدد التاليين: حيث $x=(x_1,\dots,x_n\ )\ ,y=(y_1,\dots,y_n\ )$

1. $\forall\ x\ ,y\ \in\Re^n:\ \ x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n\ )$
2. $\forall\ \alpha\ \in\Re:\ \alpha\ x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n\ )$

و كذلك مزودة بالجداء الداخلي

$$\langle x,y\rangle=\langle (x_1,x_2,\dots,x_n\ ),(y_1,y_2,\dots,y_n\ )\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i.\,y_i$$

و أن الجداء الداخلي يولد النظيم في $\Re^n$ التالي: $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\ x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

و الذي نسميه النظيم الاقليدي على $\Re^n$. تسمى الاعداد $x_1,x_2,\dots,x_n$ باحداثيات النقطة x و كل إحداثي هو عبارة عن عدد حقيقي.

نجد أن النظيم على الفضاء $\Re^n$ يحدد متركاً D معرفاً بالشكل التالي:

$$D(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

تعريف: ندعو المجموعة $N(x_0,\varepsilon) = \{x \in \Re^n : \|x-x_0\| < \varepsilon\}$ بالكرة المفتوحة في $\Re^n$ مركزها x_0 و نصف قطرها العدد الموجب ε.

تعريف: ندعو المجموعة $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in \Re^n : \|x-x_0\| \le \varepsilon\}$ بالكرة المغلقة في $\Re^n$ مركزها x_0 و نصف قطرها العدد غير السالب ε.

تعريف : نقول عن مجموعة جزئية U في $\Re^n$ انها مجموعة مفتوحة في $\Re^n$, إذا وجد لكل عنصر x من U كرة مفتوحة مركزها x و محتواة في U.

و نسمي كل مجموعة مفتوحة U في $\Re^n$ تحوي النقطة x_0 تسمى جواراً للنقطة x_0 في $\Re^n$.

تعريف : نقول عن النقطة x من $\Re^n$ أنها نقطة داخلية للمجموعة S من $\Re^n$, إذا وجد جوار للنقطة x محتوى بكامله في S . و نرمز لمجموعة النقاط الداخلية لـ S بـ S° أو بـ $int(S)$.

تعريف :نسمي النقطة x من $\Re^n$ أنها نقطة حدية للمجموعة S من $\Re^n$, إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S في نقطة (واحدة على الاقل) مغايرة لـ x.

تعريف : نقول عن النقطة x من $\Re^n$ أنها نقطة ملاصقة للمجموعة S من $\Re^n$, إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع . و تسمى مجموعة النقاط الملاصقة للمجموعة S بلصاقة S و يرمز لها بـ $\bar{S}$.

تعريف : نقول عن المجموعة S من $\Re^n$ أنها محدودة إذا وجدت كرة مفتوحة $N(x_0,\varepsilon)$ بحيث يكون $S \subseteq N(x_0,\varepsilon)$.

- تقارب المتتاليات في الفضاءات الاقليدية

تعريف : لتكن $\{x_m\}, m \in N$ متتالية في الفضاء الاقليدي $\Re^n$,نقول عن هذه المتتالية أنها تتقارب من x , إذا قابل كل عدد موجب ε, عدد صحيح موجب N_ε , بحيث يكون $\| x_m - x\| <\in$ عندما $m \ge N_\varepsilon$.

و في هذه الحالة نقول أن x أنها نهاية المتتالية $\{x_m\}, m \in N$, و نكتب $\lim_{m\to\infty} x_m = x$.

نتائج :

1. $\Re^n$ فضاء متري.
2. لا يمكن أن يكون لمتتالية في الفضاء $\Re^n$ أكثر من نهاية واحدة.
3. الشرط اللازم و الكافي لتقارب متتالية في $\Re^n$ من x, هو أن يحوي أي جوار للنقطة x جميع عناصر المتتالية , باستثناء عدد منته منها.
4. الشرط اللازم و الكافي كي تكون x نقطة حدية للمجموعة S من $\Re^n$هو أن توجد متتالية من عناصر $S\backslash\{x\}$ متقاربة من x .

تعريف : نقول عن المجموعة S من $\Re^n$ هو أنها غير مترابطة , إذا وجدت مجموعتان U,V مفتوحتان في , بحيث تكون المجموعتان $U \cap V\ , U \cup V$ منفصلتين و غير خاليتين, و بحيث يكون اجتماعهما مساوياً S .

تسمى المجموعتان U,V عندئذ فصلاً للمجموعة S. و إذا لم تتحقق هذه الشروط , فاننا نقول عن S إنها مجموعة مترابطة .

مبرهنة (3): الشرط اللازم و الكافي كي تكون المجموعة الجزئية S من الفضاء الاقليدي $\Re$مترابطة, هو أن تكون S مجالاً. (بدون برهان)

مبرهنة (4): الفضاء الاقليدي $\Re$ مترابط. (بدون برهان)

نتيجة : المجموعتان الجزئيتان الوحدتان المفتوحتان و المغلقتان في آن واحد هما $\Re^n$, $\emptyset$.

تعريف : إذا كانت x,y نقطتين من $\Re^n$, فإنه يطلق أسم القطعة المستقيمة الواصلة بين على المجموعة $L = \{\ x + t(y - x) :\ 0 \le t \le 1\}$

وإذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_m$ نقاطاً من $\Re^n$, و كانت L_i القطعة المستقيمة الواصلة بين x_{i+1} و x_i , حيث $i = 1,2, \dots, m-1$ فإننا نقول بأن المجموعة $\{\ L_1,\ L_2, \dots ,\ L_{m-1}\ \}$ تشكل خطاً مضلعاً واصلاً بين النقطتين x_1, x_m .

مبرهنة (5): الشرط اللازم و الكافي كي تكون المجموعة المفتوحة S في $\Re^n$ مترابطة , هو أن يكون بالامكان وصل أي نقطتين x,y من S بخط مضلع محتوى بأكمله في S . (بدون برهان)

- **نهايات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات**

تعريف : (نهاية دالة حقيقية على فضاء متري)

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$ و لتكن x_0 نقطة حدية لـ S و l عدداً حقيقياً

نقول أن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, إذا قابل كل عدد موجب ε عدداً موجب δ, بحيث أنه إذا كان x عنصراً من S و تحقق $\|x - x_0\| < \delta$ فأن $|f(x) - l| < \varepsilon$.

مبرهنة (6): إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ موجودة , فانها وحيدة.

قد يكون التطبيق المباشر لتعريف النهاية غاية في الصعوبة في كثير من المسائل سنأخذ الآن مبرهنة يتم استخدام المتتاليات لحساب نهاية الدالة.

مبرهنة (7): (بدون برهان)

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$ و لتكن x_0 نقطة حدية لـ S و l عدداً حقيقياً.

أن الشرط اللازم و الكافي كي يكون $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, هو أن يقابل كل متتالة $\{x_m\}, m \in N$ في S, عناصرها مختلفة جميعاً عن x_0 و متقاربة من x_0 متتالية $\{f(x_m)\}, m \in N$ متقاربة من l .

تعاريف :

لتكن f, g دالتين حقيقيتين ساحتاهما المجموعتان الجزئيتان S, T من $\Re^n$ على الترتيب . عندئذ:

a) إن $f + g$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T$, بحيث أنه أيا كان x من هذه الساحة , فان
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

b) إن $f . g$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T$, بحيث أنه أيا كان x من هذه الساحة , فان
$$(f . g)(x) = f(x) . g(x)$$

c) إن $\frac{f}{g}$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T - \{x \in \Re^n : g(x) = 0\}$, بحيث أنه أيا كان x من هذه الساحة , فان $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

مبرهنة (8):

لتكن f,g دالتين حقيقيتين ساحتاهما المجموعتان الجزئيتان S,T من $\Re^n$ على الترتيب . و لتكن x_0 نقطة حدية للمجموعة $S \cap T$. (من الواضح أن x_0 تكون عندئذ حدية لكل من $(S,T$. فإذا افترضنا وجود النهايتين $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, فأن

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x).\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_1.$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)\,(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}\ ,\ l_2 \neq 0$

(بدون برهان).

- **استمرار الدوال الحقيقية لعد متغيرات**

تعريف (استمرار دالة من فضاء متري الى آخر):

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$. نقول عن f انها مستمرة في النقطة x_0 من S , إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ, بحيث إنه إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$ فأن $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

و إذا كانت f مستمرة في كل نقطة من S , فاننا نقول أن f دالة مستمرة على S .

مبرهنة (9):

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$, و لتكن x_0 نقطة حدية لـ S عندئذ تكون القضايا التالية متكافئة:

a) الدالة f مستمرة في النقطة x_0.

b) يقابل كل جوار , للنقطة $f(x_0)$ جوار U للنقطة (U تابع لِـ V), بحيث أنه إذا كان x أي عنصر من $U \cap S$, فأن $f(x)$ عنصر من V .

c) إذا كانت $\{x_m\}, m \in N$ أي متتالية من عناصر S متقاربة من x_0 , فأن المتتالية $\{f(x_m)\}, m \in N$ تتقارب من $f(x_0)$.

البرهان:

$(a \Longrightarrow b)$: ليكن V أي جوار للنقطة $f(x_0)$. إذا هنالك عدد موجب ε , بحيث يكون $N(f(x_0),\varepsilon) \subseteq V$. و بما أن f مستمرة في النقطة x_0, فأنه يقابل ε عدد موجب δ, بحيث

إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$ فأن $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

بالتالي , فإذا كان x أي عنصر من $N(x_0,\delta) \cap S$ فأن $f(x) \in N(f(x_0),\varepsilon)$.

نستخلص من هذا أنه يقابل كل جوار للنقطة $f(x_0)$ جوار U هو $N(x_0,\delta)$ للنقطة x_0 في $\Re^n$,

بحيث أنه إذا كان x أي عنصر من $U \cap S$, فأن $f(x)$ عنصر من $N(f(x_0),\varepsilon)$ أي عنصر من V .

$(b \Longrightarrow c)$ من الفرض b نستنتج أنه يقابل الكرة المفتوحة الاختيارية $N(f(x_0),\varepsilon)$ للنقطة $f(x_0)$,

كرة مفتوحة $N(x_0,\delta)$ من $\Re^n$ (محتواة في U) بحيث أنه إذا كان x أي عنصر من S ينتمي الى $N(x_0,\delta)$, فإن $f(x) \in N(f(x_0),\varepsilon)$, أي يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ, بحيث

إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$ فأن $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

و بما أن $x_m \to x_0$ فهناك عدد صحيح M بحيث أن $m \ge M$ تقتضي $\|x_m - x_0\| < \delta$

يترتب على هذا , أنه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب M, بحيث أنه إذا كان $m \ge M$

فأن $|f(x_m) - f(x_0)| < \varepsilon$. و هذا يعني أن $f(x_m) \to f(x_0)$.

$(c \Longrightarrow a)$ لنفترض صحة c دون أن تكون f مستمرة في x_0 , إذا يوجد عدد موجب ε_0 , بحيث أنه أيا كان العدد الطبيعي m , فهناك عنصر x_m من S يحقق الشرطين

$$|f(x_m) - f(x_0)| \ge \varepsilon \quad \text{و} \quad \|x_m - x_0\| < \frac{1}{m}$$

من السهل أن نرى عندئذ بأن المتتالية الناتجة $\{x_m\}, m \in N$ من عناصر S متقاربة من x_0 , في حين أن المتتالية $\{f(x_m)\}, m \in N$ لا تتقارب من $f(x_0)$.

و هذا يناقض للفرض c , إي أن f مستمرة في x_0 , أي أن c تقتضي a .

مبرهنة (10):

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$, و لتكن x_0 نقطة حدية لـ S وتنتمي لـ S ,

فاذا كانت f مستمرة في x_0 فإن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

البرهان:

نفرض f مستمرة في x_0 من S ,أي لكل عدد موجب ε عدد موجب δ, بحيث إنه إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$ فأن $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

يتعين على ذلك , أنه إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$

(وهذا العنصر موجود, لأن x_0 نقطة حدية لـ S فرضاً) فأن $\varepsilon > |f(x) - f(x_0)|$,

و استناداً الى تعريف نهاية الدالة نجد أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

مبرهنة (11):

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$, و لتكن x_0 نقطة حدية لـ S وتنتمي لـ S ,

فاذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ فإن f مستمرة في x_0. (بدون برهان)

نتيجة :

لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$, و لتكن x_0 نقطة حدية لـ S وتنتمي لـ S ,

عندئذ يكون الشرط اللازم و الكافي كي تكون f مستمرة في x_0 هو أن يكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

مبرهنة (12):

لتكن f, g دالتين حقيقيتين مستمرتين على المجموعتان الجزئيتان S, T من $\Re^n$ على الترتيب .

فإن كلا من $f + g$, دالة مستمرة على $S \cap T$, و إذا كان $\forall\, x \in S \cap T\ ,\ g(x) \neq 0$

فإن دالة $\frac{f}{g}$ مستمرة على $S \cap T$. (بدون برهان)

تعريف : لتكن f دالة حقيقة معرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$, و لتكن $T = f(S)$ مدى الدالة f , ($f(S) \subseteq \Re$)لنفترض g دالة حقيقة لمتغير حقيقي معرفة على T , لنعرف دالة حقيقة h معرفة على S و محددة بالدستور $h(x) = g\big(f(x)\big) = f \circ g$ والتي تدعى دالة مركبة للدالتين f, g .

مبرهنة (13):

لتكن الدالتان f, g كما في التعريف السابق و لنفرض أن f مستمرة في x_0 من S و و أن g مستمرة في النقطة $f(x_0)$ من T عندئذ تكون مركبة الدالتين $f \circ g$ مستمرة في x_0.

البرهان : g دالة مستمرة في النقطة $f(x_0)$ فرضاً حسب نجد أنه إذا كان V جوار $g\big(f(x_0)\big)$ فإن $g^{-1}(V)$ جوار للنقطة $f(x_0)$ في الفضاء T . و بما أن f مستمرة في x_0

فننا نجد $f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big)$ جوار للنقطة x_0 الفضاء S . لكن $f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big) = (g \circ f)^{-1}(V)$

أي أنه إذا كان V جوار للنقطة $(g \circ f)(x_0)$ فإن $(g \circ f)^{-1}(V)$ جوار للنقطة x_0 الفضاء S

أي إنه حسب المبرهنة سابقة (القضية c) نجد أن الدالة $f \circ g$ مستمرة في النقطة x_0.

ملاحظة : إذا كانت f دالة مستمرة من فضاء متري X الى آخر و كانت S مجموعة مترابطة في X , فإن $f(S)$ مجموعة مترابطة.

مبرهنة (14) (بولزانو في القيمة الوسطى): (بدون برهان)

إذا كانت f دالة مستمرة على المجموعة مترابطة من $\Re^n$ و كانت x, y نقطتين من S و كان c عدداً حقيقياً محصوراً بين $f(x), f(y)$ فهناك عنصر b (واحد على الأقل) من S بحيث يكون $f(c) = b$.

و في حالة خاصة التي يكون فيها $n = 1$ نجد النتائج التالية:

نتيجة : إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على مجال I من $\Re$ و كانت x, y نقطتين من I و كان b عدداً حقيقياً محصوراً بين $f(x), f(y)$ فهناك عنصر c عدداً محصور بين x, y بحيث يكون $f(c) = b$.

نتيجة : إذا كانت $f: [a, b] \to \Re$ دالة حقيقية مستمرة و كان $f(a) < 0 < f(b)$, فثمة عدد حقيقي c محصور بين a, b بحيث يكون $f(c) = 0$.

نتيجة : إذا كانت $f: [a, b] \to [a, b]$ دالة حقيقية مستمرة ,فلها نقطة ثابتة أي يوجد عدد حقيقي c بحيث يكون $f(c) = c$.

تعريف: نقول عن دالة حقيقية f المعرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$ أنها محدودة من الأعلى, إذا كان مداها $f(S)$ محدوداً من الأعلى.

تعريف: نقول عن دالة حقيقية f المعرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$ أنها محدودة من الأدنى, إذا كان مداها $f(S)$ محدوداً من الأدنى.

تعريف: نقول عن دالة حقيقية f المعرفة على مجموعة جزئية S من $\Re^n$ أنها محدودة, إذا كان مداها $f(S)$ محدوداً من الأعلى و الأدنى.

و عندما تكون $f(S)$ غير خالية و محدودة من الأعلى, فإن مسلمة التمام تؤكد أن لـِ $f(S)$ حداً أعلى $\sup\limits_{x\in S} f(S)$, و يدعى هذا الحد بأصغر حد أعلى لـِ f . و إذا كانت $f(S)$ غير خالية و محدودة من الأدنى فإن لـِ $f(S)$ حداً أدنى $\inf\limits_{x\in S} f(S)$, و يدعى هذا الحد بأكبر حد أدنى لـِ f . و تجدر الملاحظة أن $\sup\limits_{x\in S} f$ في حال وجوده هو عدد ثابت مستقل عن x .

كذلك ممكن أن يكون $\sup\limits_{x\in S} f$ قيمة لـِ f, بمعنى أنه قد نجدx_0 من S , بحيث يكون $f(x_0) = \sup\limits_{x\in S} f$, وقد لا تكون هذه النقطة موجودة. و في الحالة الأولى, نقول أن $\sup f$ هو القيمة الأكبر للدالة f على S, أو نقول أن f تدرك الحد الأعلى على S. و نجد ملاحظات مماثلة فيما يتعلق بـ $\inf f$.

مبرهنة (15): لتكنf دالة حقيقة مستمرة على المجموعة الجزئية S المغلقة و المحدودة في الفضاء $\Re^n$ عندئذ :

1. الدالة f محدودة , بمعنى أن هناك عدد موجب L بحيث يكون $|f(x)| < L \ , \ \forall x \in S$.
2. الدالة f تدرك كلا من حدها الأعلى و حدها الأدنى.(بدون برهان)

تعريف : الدالة منتظمة الاستمرار

نقول عن الدالة f المعرفة على المجموعة الجزئية S من $\Re^n$ انها منتظمة الاستمرار على S . إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ بحيث إذا كان $x, \acute{x}$ أي عنصرين من S يحققان الشرط

$\|x - \acute{x}\| < \delta$ فان $|f(x) - f(\acute{x})| < \varepsilon$.

أن كل دالة مستمرة بانتظام هي دالة مستمرة و العكس غير صحيح.نأخذ مثال التالي على ذلك

مثال : نجد أن الدالة $f: [0,1] \to \Re$ المعرفة بـ $f(x) = x^2$ مستمرة بانتظام على $[0,1]$

بينما الدالة $f: \Re \to \Re$ المعرفة بـ $f(x) = x^2$ مستمرة على $\Re$ ولكنها ليست مستمرة بانتظام

لنثبت ذلك : إذا كان ε عدد موجب ما , فانه يوجد عدد حقيقي موجب δ , نأخذ عددان حقيقيان موجبان :

$x = \frac{\varepsilon}{\delta} \ , y = x + \frac{\delta}{2}$ بحيث يكون $|y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta$ فنجد

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y|(x + y) = \frac{\delta}{2}\left(2x + \frac{\delta}{2}\right) > \delta x = \varepsilon$$

و الدالة ليست مستمرة بانتظام. و عليه يكون كل دالة مستمرة ليست بالضرورة دالة مستمرة بانتظام.

مبرهنة **(16)**: إذا كانت الدالة f مستمرة على المجموعة الجزئية S مغلقة و محدودة من , فان f منتظمة الاستمرار على S .

تمارين الفصل الأول

1. لتكن $\boldsymbol{f}:\mathfrak{R}^2\backslash\{(0,0)\}\ \rightarrow\ \mathfrak{R}$ الدالة $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

***a)* ادرس وجود النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$**

***b)* أثبت أنه يوجد للدالة f نهاية L_a عندما (x,y) يسعى الى $(0,0)$ على طول منحن معادلة $y=g(x)$ يمر بالنقطة $(0,0)$ و يحقق الشرط $\acute{g}(x)=a$. أوجد قيمة L_a .**

الحل: a)لاثبات عدم وجود نهاية للدالة $f(x,y)$ نعطي أمثلة باستخدام المتتاليات و بأن للدالة أكثر من نهاية عندما (x,y) يسعى الى $(0,0)$.

لنأخذ المتتالتين:$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$, $(\acute{x}_n,\acute{y}_n)=\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$

و نحسب النهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f\,(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\ =\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(\acute{x}_n,\acute{y}_n)\to(0,0)} f\,(\acute{x}_n,\acute{y}_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right)\ =\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n^2}}{\frac{13}{n^2}}=\frac{6}{13}$$

بالتالي نجد : $\frac{1}{2}=\lim\limits_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f\,(x_n,y_n)\neq\lim\limits_{(\acute{x}_n,\acute{y}_n)\to(0,0)} f\,(\acute{x}_n,\acute{y}_n)=\frac{6}{13}$

أي أنه لا يوجد نهاية لهذه الدالة. لانه إذا وجدت نهاية لدالة فإنها وحيدة.

b) بما أن $y=g(x)$ نجد $f\big(x,g(x)\big)=$ هي دالة لمتغير واحد x , نستخدم قاعدة أوبيتال عدة مرات (نهاية مشتق الصور على نهاية مشتق المقام) لايجاد النهاية ونعوض $\acute{g}(x)=a$

$$\lim_{x\to0} f\big(x,g(x)\big)=\lim_{x\to0}\frac{x.g(x)}{x^2+g^2(x)}\ =\frac{0}{0}\ =$$ حالة عدم تعين

$$\operatorname*{Lim}_{x\to0}\frac{x.g(x)}{x^2+g^2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)+x.\acute{g}(x)}{2x+2g(x)\,\acute{g}(x)}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)+x.a}{2x+2g(x)\,a}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\acute{g}(x)+a}{2+2a\acute{g}(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2a}{2+2a^2}=\frac{a}{1+a^2}=L_a$$

و هي النهاية المطلوبة.

2. لتكن $\boldsymbol{f}:\mathfrak{R}^2\backslash\{(0,0)\}\ \rightarrow\ \mathfrak{R}$ الدالة المحددة بالدستور

$$\boldsymbol{f(x,y)}=\begin{cases}\dfrac{\left[\,x+(y-2)^2-1\,\right]^{\frac{1}{2}}-1}{x^2+(y-2)^2} & (x,y)\neq(0,2)\\ 0 & (x,y)=(0,2)\end{cases}$$

***a)* أثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)=\frac{1}{2}$**

b) هل الدالة f مستمرة في النقطة $(0,2)$

الحل: حسب تعريف نهاية الدالة يقابل كل عدد موجب ε عدد موجب $\delta = 2\varepsilon$ بحيث إذا كان

$(x,y) \in \Re^2\backslash\{(0,0)\}$ و تحقق $\|(x,y)-(0,2)\| = \sqrt{x^2+(y-2)^2} < \delta$

نأخذ $x^2+(y-2)^2 = a$ فيكون $\|(x,y)-(0,2)\| = \sqrt{a} < \delta$

بحيث يتحقق: $\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{a+1}}{a}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{a+1}\ -2-a}{2a}\right| = \left|\frac{a+2-2\sqrt{a+1}}{2a}\right| =$$

$$\left|\frac{a+2-2\sqrt{a+1}}{2a}\right| = \left|\frac{(a+1)-2\sqrt{a+1}+1}{2a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2}{2a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a+1}\ -1\right)^2\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}\right|$$

$$= \left|\frac{a^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}\right| = \left|\frac{a}{2\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}\right| < \frac{a}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon$$

بالتالي نجد أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

b) حسب الطلب الأول نجد أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f(0,2) = 0$

نهاية الدالة في النقطة $(0,2)$ لا تساوي قيمة الدالة هذه النقطة بالتالي تكون الدالة $f(x,y)$ غير مستمرة في $(0,2)$.

3. إذا كانت $f:\Re^2\backslash\{(0,0)\} \to \Re$ الدالة معرفة بالدستور $f(x,y) = \frac{x^3\cos y}{x^2+y^2}$

أثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

الحل : يقابل كل عدد موجب ε عدد موجب $\delta = \varepsilon$ بحيث إذا كان $(x,y) \in \Re^2\backslash\{(0,0)\}$ و تحقق $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ فإن :

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|\cos y| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

و منه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

4. ليكن n عدداً صحيحاً أكبر من الواحد , و لتكن $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ أعداد حقيقية غير سالبة و f الدالة الحقيقية المعرفة على المجموعة $S = \Re_+^n \backslash\{(0,0,\dots,0)\}$ بـ

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}}{\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)^b}$$

a) أثبت أنه إذا كان $a_1+a_2+\dots+a_n > 2b$ فإن $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} f(x_1,\dots,x_n) = 0$

b) أثبت أنه إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2b$ فإنه ليس للدالة f نهاية في $(0, 0, \dots, 0)$ و أن الدالة محدودة $0 \le f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 1$.

c) أثبت أنه إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2b$ فإنه ليس للدالة f نهاية في $(0, 0, \dots, 0)$

d) و أن f ليست محدودة في جوار هذه النقطة .

الحل : إذا كان $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ عندئذ نوجد $\sup\limits_{1\le i\le n} x_i$ و نكتب

$$0 \le f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}}{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^b} \le \frac{x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}}{(\sup x_i)^{2b}}$$

$$\le \left(\sup_{1\le i\le n} x_i\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b}$$

بالتالي :

a) إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 2b$ فإن

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \lim_{x_i\to 0}\left(\sup_{1\le i\le n} x_i\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b} = 0$$

b) إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2b$ فأن f دالة محدودة لان

$$0 \le f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \left(\sup_{1\le i\le n} x_i\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b} = \left(\sup_{1\le i\le n} x_i\right)^0 = 1 \ .$$

كما أنه إذا كانت x_i متساوية و تساوي x مهما كانت i :نجد

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \frac{x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{(nx^2)^b}$$

$$= \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \frac{x^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b}}{n^b} = \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \frac{1}{n^b} = \frac{1}{n^b}$$

و لدينا $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

بالتالي حصلنا على نهايتين مختلفتين للدالة f لذلك ليس للدالة f نهاية في النقطة $(0,0,\dots,0)$.

c) إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2b$ فإنه

$$\lim_{x\to 0} f(x, x, \dots, x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n^b.x^{2b-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}} = \infty$$

نجد أنه ليس للدالة f نهاية في $(0,0,\dots,0)$.

5. أذا كانت $f: \mathfrak{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathfrak{R}$ الدالة معرفة بالدستور $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

أدرس وجود النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

نكتب $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)}.(x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

بما أن $\lim\limits_{z\to 0} z\ln z = 0$ و الدالة g المعرفة بـ $g(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)}$

محدودة حسب التمرين السابق (4) بالتالي يكون $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

6. أذا كانت $f: \Re^2 \backslash \{(0,0)\} \rightarrow \Re$ الدالة معرفة بالدستور $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$
أدرس وجود النهاية $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y)$.

ندرس نهاية الدالة بإيجاد نهايتين مختلفتين كما يلي:

1. نأخذ $x = y$ فيكون (حيث نطبق قاعدة أوبيتال)

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{4x} = \frac{1}{2}$$

2. نأخذ $y = 0$ مهما كانت x فيكون

$$\lim_{x\rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

نجد أن النهايتين مختلفتين بالتالي لا يوجد نهاية للدالة المعطاة.

7. لتكن لدينا الدالة الاسقاطية $i = 1,2,\dots,n$, $f_i: \Re^n \rightarrow \Re$ المعرفة بالدستور
$f_i(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) = a_i$ أثبت أنها دالة مستمرة على $\Re^n$.

الحل : لنثبت بأن الدالة مستمرة في أي النقطة $a = (a_1,\dots,a_n) \in \Re^n$ بالتالي فأنه يقابل كل عدد موجب ε عدد موجب $\delta = \varepsilon$ بحيث إذا كان $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Re^n$ و تحقق

$$\|x-a\| = \|(x_1,\dots,x_n) - (a_1,\dots,a_n)\|$$

$$\|x-a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} < \delta$$

فإن : $|f_i(x) - f_i(a)| = |y_i - a_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta = \varepsilon$

و هذا يعني أن الدالة f_i مستمرة في النقطة a بالتالي هي مستمرة على $\Re^n$.

8. ادرس وجود النهاية للدوال المعرفة على $\Re^2 \backslash \{(0,0)\}$ والتي تأخذ قيمها في $\Re$.

1) $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$, 2) $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^3}$, 3) $lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

4) $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}$

الحل: 1) $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

لاثبات عدم وجود نهاية للدالة $f(x,y)$ نعطي أمثلة باستخدام المتتاليات و بأن للدالة أكثر من نهاية عندما (x,y) يسعى الى $(0,0)$.

لنأخذ المتتالتين: $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\rightarrow\infty]{} (0,0)$, $(\acute{x}_n,\acute{y}_n) = \left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\rightarrow\infty]{} (0,0)$

و نحسب النهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f\,(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(\acute{x}_n,\acute{y}_n)\to(0,0)} f\,(\acute{x}_n,\acute{y}_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

بالتالي نجد : $\frac{1}{2} = \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f\,(x_n,y_n) \neq \lim_{(\acute{x}_n,\acute{y}_n)\to(0,0)} f\,(\acute{x}_n,\acute{y}_n) = \frac{2}{5}$

أي أنه لا يوجد نهاية لهذه الدالة. لانه إذا وجدت نهاية لدالة فإنها وحيدة.

- يترك للطالب دراسة نهاية (3 , 2) (الثانية لها نهاية صفر و الثالثة لا يوجد لها نهاية).

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}$

الحل: لنثبت أن نهاية تساوي الصفر

نكتب $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0$

حسب تعريف النهاية : يقابل كل عدد موجب ε عدد موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ بحيث إذا كان

$(x,y) \in \mathfrak{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ و تحقق $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ فإن :

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 2|x|\,\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\,\frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$< 2|x|\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + |y|\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} < 2|x| + |y|$$

$$< 2\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} < 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = \varepsilon$$

و منه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

9. أدرس أستمرار على للدالة المحددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

الحل : ندرس أستمرار الدالة عند نقطة $a \neq 0, (a,b)$ من $\mathfrak{R}^2$ و من أجل كل نقطة $(x,y) \in \mathfrak{R}^2$

نجد أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin ab}{a} = f(a,b)$

النهاية تساوي قيمة الدالة عند النقطة (a,b) , فالدالة مستمرة في كل نقطة $a \neq 0, (a,b)$ من $\mathfrak{R}^2$

أما إذا كانت $a = 0$ و $\forall\, y \in \mathfrak{R}$ فأن النهاية تساوي قيمة الدالة عند النقطة $(0,y)$

$\lim_{(x,y)\to(0,y)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y)} y.\frac{\sin xy}{xy} = y = f(0,y)$ بالتالي الدالة مستمرة على $\mathfrak{R}^2$.

الفصل الثاني

مشتقات و تفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

- **مشتقات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات**

تعريف : لتكن f دالة حقيقية لعدة متغيرات معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$

$$f: D \subseteq \Re^n ------\to \Re$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

و لتكن $c = (c_1, \dots, c_n)$ نقطة داخلية في D فإذا وجدت النهاية

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(c_1+h_1,\dots,c_n) - f(c_1,\dots,c_n)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$$

فننا نقول بإنه يوجد مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول x_1 في النقطة c . و نرمز لهذه النهاية كذلك بالرمز التالية: $f_{x_1}(c)$. و من الواضح أن هذا المشتق الجزئي ليس إلا مشتق الدالة الحقيقية $f(x_1, c_2, \dots, c_n)$ التابعة للمتغير الحقيقي x_1 في النقطة $x_1 = c_1$.

و تعرف المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة $x_2, \dots, x_n$ في النقطة c بصورة مماثلة , أي أن

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(c_1, c_2+h_2,\dots,c_n) - f(c_1,\dots,c_n)}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c)$$

....

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{f(c_1, c_2,\dots,c_n+h_n) - f(c_1,\dots,c_n)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)$$

و ذلك في حالة وجود هذه النهايات تسمى الدوال $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)$ المشتقات الجزئية الأولى أو المشتقات الأولى للدالة f بالنسبة $x_1, x_2, \dots, x_n$ على الترتيب في النقطة c.

مثال : لتكن الدالة $f: \Re^+ \times \Re \to \Re$ المحددة بالمساواة $f(x,y) = x^y$

عندئذ تكون دالتين لهما نفس ساحة, كما أن $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ و $\frac{\partial f}{\partial x} = y\, x^{y-1}$.

مثال : لتكن الدالة $f: \Re^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \Re$ المحددة بالمساواة $f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$

أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ و هي دوال لها نفس ساحة الدالة f

فنجد $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

لنفرض أنه يوجد المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) : D \subseteq \Re^n \longrightarrow \Re$$

أن كلا من هذه المشتقات الجزئية دالة حقيقية ساحتها جزء من $\Re^n$.

فإذا و جد للدالة $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ مشتق جزئي بالنسبة الى x_1 فاننا نرمز له بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ أو بـ $f_{x_1x_1}$.

وإذا و جد للدالة $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ مشتق جزئي بالنسبة الى x_2 فاننا نرمز له بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ أو بـ $f_{x_1x_2}$.

وإذا و جد للدالة $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ مشتق جزئي بالنسبة الى x_1 فاننا نرمز له بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ أو بـ $f_{x_2x_1}$.

وإذا و جد للدالة $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ مشتق جزئي بالنسبة الى x_2 فاننا نرمز له بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ أو بـ $f_{x_2x_2}$.

بالاضافة الى هذه المشتقات الجزئية الثانية, يمكننا تعريف المشتقات الجزئية الثالثة على النحو التالي:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

و تعرف المشتقات من مراتب أعلى بصورة مماثلة.

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ تابعة لمتغيرين , فاننا نرمز لمشتقات من المرتبة m على النحو التالي:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\,\partial y}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2}\,\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x^2\,\partial y^{m-2}}, \frac{\partial^m f}{\partial x\ \partial y^{m-1}}, \frac{\partial^m f}{\partial y^m}$$

نلاحظ أن عدد هذه المشتقات هو $m+1$, أما في حالة الدوال $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ لأكثر من متغيرين فان المشتقات الجزئية من أي مرتبة تعرف بصورة مماثلة.

تسمى المشتقات $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x_2^m}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}$ مشتقات الجزئية الصرفة . و تسمى المشتقات الجزئية التي يتم فيها الاشتقاق بالنسبة لأكثر من متغير بالمشتقات الجزئية المختلطة.

مثال : لنأخذ الدالة $f: \Re^3 \to \Re$ المحددة بالمساواة $f(x,y,z) = x^4\,y^3\,z^2$ فأن :

$$f_x = 4x^3\,y^3\,z^2, f_{xy} = 12x^3\,y^2\,z^2, f_{xyz} = 24x^3\,y^2\,z, f_{xyzx} = 72x^2\,y^2\,z$$

$$f_y = 3x^4\, y^2\, z^2, f_{yx} = 12x^3\, y^2\, z^2\, , f_{yxx} = 36x^2\, y^2\, z^2\, , f_{yxxz} = 72x^2\, y^2\, z$$

$$f_z = 2x^4\, y^3\, z\, , f_{zx} = 8x^3\, y^3\, z\, \; , f_{zxy} = 24x^3\, y^2\, z\, \; , f_{zxyx} = 72x^2\, y^2\, z$$

نلاحظ تطابق المشتقات الجزئية المأخوذة بالنسبة لنفس المتغيرات.

مثال : لتكن $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ الدالة المحددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أثبت أن المشتقات المختلطة التالية في نقطة معينة تحقق $f_{xy}(x,y) \neq f_{yx}(x,y)$

الحل: ندرس المشتق بالنسبة لـ x عند النقطة $(0,0)$ و ذلك حسب تعريف المشتق:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(\,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

حيث $f(\,0,0) = 0$ و $f(h,0) = \frac{h\times 0}{h^2+0} = 0$, لنأخذ المشتق بالنسبة لـ y عند النقطة $(0,0)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(\,0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

حيث $f(\,0,0) = 0$ و $f(0,k) = \frac{0\times k(0-k^2)}{0+k^2} = 0$.

لنوجد $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ في كل نقطة (x,y) مغايرة للنقطة $(\,0,0\,)$ فأن:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left[\frac{[(x^2-y^2)+2x^2](x^2+y^2)-2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left[\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left[\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

أما الآن نوجد $\frac{\partial f_y}{\partial x}$, $\frac{\partial f_x}{\partial y}$ في النقطة $(0,0)$, نجد حسب تعريف المشتق:

$$\frac{\partial f_x(0,0)}{\partial y} = f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,0+k)-f_x(\,0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k+0}{k} = -1$$

حيث $f_x(\,0,0) = 0$ و $f_x(0,k) = k\left[\frac{-k^2}{k^2} + \frac{0}{k^2}\right] = -k$.

كذلك $\frac{\partial f_y(0,0)}{\partial x} = f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$

حيث $f_y(0,0) = 0$ و $f_y(h,0) = h\left[\frac{h^2-0}{h^2} + \frac{4h^2\times 0}{h^4}\right] = h$.

فنجد أن : $f_{xy}(x,y) \neq f_{yx}(x,y)$

و حتى تتساوى المشتقات المختلطة التي تختلف في ترتيب الاشتقاق فيها فقط, يجب أن تتحقق شروط اضافية نعرضها في المبرهنة التالية:

مبرهنة (1): لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية لعدة متغيرات معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^2$. و لنفرض تحقق الشرطين التاليين:

1. المشتقات الجزئية f_x, f_y , موجودة في كل نقطة من D .
2. المشتقان المختلطان f_{xy}, f_{yx} مستمران في كل نقطة (a,b) من D .

عندئذ يكون $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

البرهان :(تقبل دون برهان).

مبرهنة (2): لتكن $f(x)$ دالة حقيقية لعدة متغيرات معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$. و لنفرض تحقق الشرطين التاليين:

1. كل المشتقات الجزئية الممكنة حتى المرتبة $m-1$ بما فيها المرتبة $m-1$, و المشتقات المختلطة من المرتبة m موجودة جميعاً في كل نقطة من D .
2. المشتقات المختلطة من المرتبة m مستمرة جميعاً في كل نقطة c من D. عندئذ تكون قيمة أي مشتق مختلط من المرتبة m في النقطة c مستقلة عن ترتيب الذي نجري به الاشتقاقات.

البرهان :(تقبل دون برهان).

فإذا كانت $f(x,y)$ دالة لمتغيرين تحقق شروط المبرهنة السابقة فأن :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial x^p\, \partial y^q} = \frac{\partial^m f}{\partial x^{i+p}\, \partial y^{j+q}} \quad , \qquad m = i+j+p+q$$

وهكذا, فأن كل المشتقات الجزئية لهذه الدالة من المرتبة m هي كما يلي: $\frac{\partial^m f}{\partial x^i\, \partial y^{m-i}}, (0 \le i \le m)$,

كذلك فأن كل المشتقات الجزئية من المرتبة m للدالة $f(x_1, \dots, x_n)$, يمكن أن تكتب عند تحقق شروط النظرية السابقة, على الشكل: $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j \dots \partial x_{n-1}^k\, \partial x_n^{m-(i+j+\dots+k)}}$ حيث $(0 \le i+j+\dots+k \le m)$

تعريف المشتق الاتجاهي :

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية لعدة متغيرات معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$.ولتكن c نقطة داخلية من D. لنفترض u نقطة من $\Re^n$ تحقق الشرط $\|u\| = 1$. فإذا وجدت النهاية

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(c) \qquad (1)$$

فاننا نسمي هذه النهاية المشتق الاتجاهي للدالة f في النقطة c, أو مشتق الدالة في النقطة c باتجاه u .

مثال : لتكن $f: \Re^2 \to \Re$ الدالة المحددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أوجد المشتق الاتجاهي في النقطة $c = (0,0)$ باتجاه $u = (\alpha, \beta)$, حيث $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

نلاحظ أن $c + hu = hu = (h\alpha, h\beta)$ فيكون

$$f(c+hu) - f(c) = f(h\alpha, h\beta) = \frac{h^3\alpha\beta^2}{h(\alpha^2+\beta^2)} = h\alpha\beta^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\alpha\beta^2}{h} = \alpha\beta^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(c)$$

- **تفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات**

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية لعدة متغيرات معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^2$.ولتكن (a,b) نقطة داخلية من D. عندئذ توجد كرة مفتوحة مركزها (a,b) و نصف قطرها δ محتواة في D.

لنفترض h,k عددين حقيقيين يحققان الشرط: $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} < \delta$ فإذا وجد عددان A,B بحيث يكون:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \eta.\sqrt{h^2+k^2} \qquad (2)$$

حيث $\eta(h,k)$ دالة لـ h,k تحقق الشرط : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$

فاننا نقول أن الدالة f قابلة للمفاضلة (أو للاشتقاق) في النقطة (a,b) إذا وضعنا $k = 0$ في العلاقة

(2) فاننا نجد :
$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{h} = A \pm \eta(h,k)$$

نستنتج أن
$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b\,)-f(a,b)}{h} = A$$

أما إذا وضعنا $h = 0$ نجد:
$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a\,,b+k)-f(a,b)}{k} = B$$

بالتالي إذا كانت الدالة f قابلة للمفاضلة (أو للاشتقاق) فاننا نجد :

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k + \eta.\sqrt{h^2+k^2} \qquad (3)$$

حيث $\eta(h,k)$ دالة لـ h,k تحقق الشرط : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$.

عندئذ يطلق اسم تفاضل f في النقطة (a,b) , أو مشتق فريشيه للدالة f في النقطة (a,b) على الدالة الخطية $f: \mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور

$$\left(d_{(a,b)}f\right)(h,k) = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$

مثال : لتكن الدالة $f: \mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أثبت أن الدالة f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

نوجد المشتقات الجزئية
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\,h,0\,)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0\,,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

و إذا كانت الدالة f قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$, لوجب وجود دالة $\eta(h,k)$ تحقق الشرط :

$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$. بحيث يكون $f(h,k) - f(0,0) = \eta.\sqrt{h^2+k^2}$

أي
$$\frac{hk}{h^2+k^2} = \eta.\sqrt{h^2+k^2} \implies \eta(h,k) = \frac{hk}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لنوجد النهاية $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k)$.

نأخذ $\lim_{k\to 0} \eta(0,k) = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0$

$$\lim_{h\to 0} \eta(h,h) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}\, h} = \infty$$

نجد أن النهاية لا تساوي الصفر بالتالي نستنتج أن الدالة f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

مثال : لتكن الدالة $f\colon \Re^2 \to \Re$ المحددة بالدستور $f(x,y) = x^2 + 2xy$

أثبت أن الدالة f قابلة للمفاضلة في النقطة (a,b) من $\Re^2$.

لنوجد: $f(a+h,b+k) - f(a,b) = (a+h)^2 + 2(a+h)(b+k) - a^2 - 2ab$

و $f_x(a,b) = 2a + 2b \quad , f_y(a,b) = 2a$

نعوض في العلاقة التالية:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)\, h + f_y(a,b)\, k + \eta.\sqrt{h^2+k^2}$$

و بعد إجراء الاختصارات اللازمة نجد: $h^2 + 2hk = \eta.\sqrt{h^2+k^2}$

أي $\eta(h,k) = \frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$

و لما كان $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

فأن الدالة f قابلة للمفاضلة في النقطة (a,b) من $\Re^2$.

اثبات أن : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. حسب التعريف يقابل كل عدد موجب ε عدد موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

بحيث إذا كان $(x,y) \in \Re^2\backslash\{(0,0)\}$ و تحقق $\|(h,k) - (0,0)\| = \sqrt{h^2+k^2} < \delta$ فإن :

$$|\,\eta\,(h,k) - 0| = \left|\frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| + 2|h|\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$

$$< \left|\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| + 2|h|\left|\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| <$$

$$< \sqrt{h^2+k^2} + 2\sqrt{h^2+k^2} < 3\sqrt{h^2+k^2} < 3\delta = \varepsilon$$

و منه $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$.

- **تعميم تعريف التفاضل للدوال الحقيقية لعدة متغيرات ساحاتها أجزاء من $\mathfrak{R}^n$ حيث $n > 2$.**

تعريف : لتكن $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دالة حقيقية لعدة متغيرات معرفة على مجموعة جزئية D من $\mathfrak{R}^n$. ولتكن $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ نقطة داخلية من D. عندئذ توجد كرة مفتوحة مركزها c و نصف قطرها δ محتواة في D. فإذا كانت $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ نقطة من $\mathfrak{R}^n$ تحقق الشرط $\|h\| < \delta$

و وجدت النقطة $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ بحيث يكون

$$f(c+h) - f(c) = \langle A, h\rangle + \eta . \|h\|$$

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta . \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2} \qquad (4)$$

بافتراض $\eta(h)$ دالة لـ h تحقق الشرط : $\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0$.

فاننا نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق (أو المفاضلة) في النقطة c إذا وضعنا $h_2 = \cdots = h_n = 0$

في العلاقة (4) فاننا نجد أن المشتق بالنسبة لـ x_1 موجود و يساوي A_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(c_1 + h_1, c_2, \dots, c_n) - f(c_1, \dots, c_n)}{h_1} = A_1 + \lim_{h_1 \to 0} \eta = A_1$$

كذلك بصورة مماثلة نجد :

$$\frac{\partial f(c)}{\partial x_2} = A_2 \ , \dots , \frac{\partial f(c)}{\partial x_n} = A_n$$

و منه نكتب (3) بالشكل :

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} + \eta . \|h\|$$

و عندما تكون الدالة f قابلة للاشتقاق (أو المفاضلة) في النقطة c فأنه يطلق اسم تفاضل f في النقطة c على الدالة الخطية $f : \mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور

$$\left(d_{(c)} f\right) h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \qquad (5)$$

و لتحقيق الانسجام بين الرموز المستخدمة حالياً . نعرف الدالة $dx_i : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور

$$dx_i(x) = dx_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$$

أي أن هي دالة التي يقابل وفقها كل نقطة x من $\mathfrak{R}^n$, الاحداثي الـ i لهذه النقطة . عندئذ يمكن كتابة (5) بالشكل

$$\left(d_{(c)} f\right) h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} dx_i(h)$$

حيث $dx_i(h) = h_i$. الأمر الذي يترتب عليه أن $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} dx_i$

وفي حال $n = 3$ نكتب تفاضل الدالة الدالة f في النقطة c

$$d_{(c)}f = \frac{\partial f(c)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(c)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(c)}{\partial z} dz$$

مبرهنة (3): لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$. ولتكن c نقطة داخلية من D,

فإذا كانت f قابلة للاشتقاق في c فهناك عددان موجبان k, δ بحيث أنه إذا تحقق الشرط $\|x - c\| < \delta$

فأن $|f(x) - f(c)| < k\|x - c\|$.

البرهان: بما أن f قابلة للاشتقاق في c فرضاً, فأنه يوجد عدد موجب δ_1 و يتحقق الشرط $\|h\| < \delta_1$,

فهنالك نقطة $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ في $\Re^n$ بحيث يكون

$$f(c + h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta. \|h\|$$

بافتراض $\eta(h)$ دالة لـ h تحقق الشرط : $\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0$. نستنتج من هذا أنه إذا كان $\|h\| < \delta_1$

فأن

$$\begin{aligned} |f(c + h) - f(c)| &= |\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta. \|h\|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |A_i| \, |h_i| + |\eta|. \|h\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|A_i| + |\eta|) . \|h\| \end{aligned}$$

ولما كان $\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0$ فإنه يقابل العدد الموجب $\varepsilon = 1$ عدد موجب δ_2 بحيث أنه إذا كان

$0 < \|h\| < \delta_2$ فإن $|\eta(h)| < 1$ و لو وضعنا $x = c + h$ و $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ فأنه يترتب

على ما سبق, أنه إذا تحقق الشرط $\|x - c\| < \delta$ فأن $|f(x) - f(c)| < k\|x - c\|$.

حيث $k = \sum_{i=1}^{n} (|A_i| + 1) > 1$.

مبرهنة (4): لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$. ولتكن c نقطة داخلية من D,

فإذا كانت f قابلة للاشتقاق في c فأنها مستمرة في هذه النقطة.

البرهان : ليكن ε عدداً موجباً ما , عندئذ يترتب حسب المبرهنة (3) أنه يوجد عددان موجبان k, δ

بحيث أنه إذا كان x عنصراً من D يحقق الشرط $\|x - c\| < \delta$

فأن $\|x-c\| k > |f(x)-f(c)|$ محقق. ومن الممكن دوماً افتراض $\delta < \frac{\varepsilon}{k}$. عندئذ :

إذا كان x عنصراً من D يحقق الشرط $\|x-c\| < \delta$ فأن $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$

أي أن f دالة مستمرة في النقطة c.

مثال : لتكن الدالة $f:\Re^2 \to \Re$ المحددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

أثبت أن الدالة f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

الحل: يكفي أن نثبت عدم أستمرار الدالة f في النقطة $(0,0)$.

لو كانت f دالة مستمرة في $(0,0)$ فإنه يقابل العدد $\varepsilon = \frac{1}{2}$ عدد موجب δ بحيث أنه إذا كان (x,y) عنصراً من $\Re^2$ يحقق الشرط $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$,

و إذا اخترنا النقطة $(x,y) = \left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ فمن السهل ملاحظة $\left\| \left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right) \right\| = \sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$

فأن $\frac{1}{2} < 1 = \left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right| < \left|f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)-f(0,0)\right|$.

و هذا غير ممكن, إذا فالدالة f غير مستمرة في النقطة $(0,0)$ بالتالي غير قابلة للمفاضلة في هذه النقطة.

مبرهنة (5): لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$. ولتكن c نقطة داخلية من D,

و D مجموعة مفتوحة عندئذ:

1. إذا كانت كل المشتقات الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ موجودة في جوار ما للنقطة c و مستمرة في c فإن الدالة f قابلة للاشتقاق في c .
2. إذا كانت كل المشتقات الجزئية الأولى للدالة f موجودة و مستمرة في D فأن f قابلة للاشتقاق في أي نقطة من D .

البرهان :(تقبل دون برهان).

- **خواص الدوال القابلة للتفاضل (للاشتقاق)**

مبرهنة (6): لتكن f, g دالتين حقيقيتين معرفتين على مجموعة جزئية D من $\Re^n$. ولتكن c نقطة داخلية من D, و f, g قابلتين للاشتقاق في c .

1. إذا كان α, β عددين حقيقيين, فأن الدالة $\alpha f + \beta g$ قابلة للاشتقاق في c . كما أن :

$$d_c(\alpha f + \beta g) = \alpha\, d_c f + \beta\, d_c g$$

2. أن الدالة $f.g$ قابلة للاشتقاق في c . كما أن :

$$d_c(f.g) = f(c)\, d_c g + g(c)\, d_c f$$

البرهان :(تقبل دون برهان).

نعرض الآن مبرهنة تتعلق بقابلية اشتقاق مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق.

مبرهنة (7): لتكن $u(x,y), v(x,y)$ دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعة الجزئية D من $\Re^2$. و لنفرض أن هاتين الدالتين قابلتين للاشتقاق في نقطة داخلية (a,b) من D, و لتكن $f(u,v)$ دالة حقيقية معرفة على $\acute{D}$ حيث $\Re^2 \supseteq \acute{D} \supseteq \{(u(x,y), v(x,y)) : (x,y) \in D\}$

و لنفترض أن $(u(a,b), v(a,b)) = (\alpha, \beta)$ نقطة داخلية في $\acute{D}$ و أن f قابلة للاشتقاق في هذه النقطة. عندئذ تكون الدالة $g: D \to \Re$ المعرفة بـ $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$

قابلة للاشتقاق في النقطة (a,b) و المشتقان الجزئيان لهذه الدالة في (a,b) يعطيان بالدستورين:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \qquad (7)$$

البرهان :(تقبل دون برهان).

مبرهنة (8): لتكن $u(x,y), v(x,y)$ دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعة الجزئية D من $\Re^2$. و و لهما مشتقات أواى مستمرة في D, و لتكن $f(u,v)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة $\acute{D}$ حيث $\Re^2 \supseteq \acute{D} \supseteq \{(u(x,y), v(x,y)) : (x,y) \in D\}$

فإذا وجد للدالة $f(u,v)$ مشتقان أولان مستمران في $\acute{D}$ فأن يوجد للدالة $g: D \to \Re$ المعرفة بـ $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ مشتقان أولان مستمران في D معينان بالدستورين:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (9)$$

البرهان :(تقبل دون برهان).

يمكننا تعميم النظريتين السابقتين على $\Re^n$ حيث $f: D \subseteq \Re^n \to \Re$

مبرهنة (9): لتكن $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ دوال حقيقية معرفة على المجموعة الجزئية D من $\Re^m$, و لنفترض أن هذه الدوال قابلة للاشتقاق في نقطة داخلية c من D.

و لتكن $f(u) = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ دالة حقيقية معرفة على $\acute{D}$, حيث $\{(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) : x \in D\} \subseteq \acute{D} \subseteq \Re^n$ و لنفترض أن النقطة $u(c) = \big(u_1(c), u_2(c), \dots, u_n(c)\big)$ داخلية في $\acute{D}$, و أن f قابلة للاشتقاق في هذه النقطة. عندئذ تكون الدالة $g: D \to \Re$ المعرفة بـ $g(x) = f(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) = f\big(u(x)\big)$ قابلة للاشتقاق في النقطة c , و المشتقات الجزئية لهذه الدالة في c تعطى بالدستور:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(c) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f\big(u(c)\big)}{\partial u_j}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(c) \quad , i = 1,2,\dots,m \qquad (10)$$

البرهان :(تقبل دون برهان).

و في الحالة الخاصة التي تكون فيها $m = 1$, فإن الدالة $u: [a,b] \to \Re$ المعرفة بالمساواة :

$u(x) = \big(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\big)$ تسمى منحنياً. فإذا وجد للدوال الحقيقية للمتغير الحقيقي $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ مشتقات أولى مستمرة في $[a,b]$, فأننا نقول عن هذا المنحني أنه قابل للاشتقاق باستمرار. و إذا كانت $f(u) = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ دالة معرفة على مجموعة مفتوحة في $\Re^n$ تحوي مجموعة قيم الدالة u , بالتالي فأن للدالة $f\big(u(x)\big)$ مشتقاً مستمراً على $]a,b[$, و أن قيمة هذا المشتق في نقطة x من $]a,b[$ تعطى بالدستور

$$\frac{d}{dx} f\big(u(x)\big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f\big(u(c)\big)}{\partial u_j}\,\frac{du_j(x)}{dx} \qquad (11)$$

تمارين الفصل الثاني

1) لتكن الدالة $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور $f(y,z) = y^2 - z^2$ و لنفرض أن $y, z: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ دالتان محددتان كالتالي: $y(x) = \ , z(x) = 2ax \ , \ a \in \mathfrak{R}$

أوجد تفاضل الدالة f بطريقتين.

الحل:الطريقة الأولى:

لدينا في هذه الحالة الدالة $u(x) = \left(u_1(x), u_2(x)\right)$ حيث $u_1(x) = ax^2, u_2(x) = 2ax$

بالتالي فأن : $f\left(u(x)\right) = f\left(u_1(x), u_2(x)\right) = u_1^2(x) - u_2^2(x) = u_1^2 - u_2^2$

لذا فانه يترتب على ذلك ايجاد تفاضل الدالة كما يلي:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f\left(u(x)\right)}{\partial u_1}\frac{\partial u_1(x)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(u(x)\right)}{\partial u_2}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x}$$
$$= 2u_1(x)(2ax) - 2u_2(x)(2a)$$
$$= (2a^2x)(2ax) - 2(2ax)(2a) = 4a^2x^3 - 8a^2x$$

الطريقة الثانية:

نكتب $f(x) = f(y,z) = y^2 - z^2 = (ax^2)^2 - (2ax)^2 = a^2x^4 - 4a^2x^2$

فأن تفاضل الدالة هو: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2x^4 - 4a^2x^2\right) = 4a^2x^3 - 8a^2x$

2) لتكن الدالة $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور: $f(x,y) = arc\tan\frac{y}{x} \ , \ x \neq 0$

و لتكن الدالتان $x(t), y(t): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ حيث $x(t) = \cos t \ , y(t) = \sin t$

أحسب $\frac{\partial f}{dt}\left(x(t), y(t)\right)$ بطريقتين.

الطريقة الأولى: نكتب

$$f\left(x(t), y(t)\right) = arc\tan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = arc\tan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = acr\tan(\tan t) = t$$

و منه $\frac{\partial f}{dt}\left(x(t), y(t)\right) = 1$

الطريقة الثانية :نشتق الدالة $f\left(x(t), y(t)\right)$

$$\frac{\partial f}{dt}\left(x(t), y(t)\right) = \frac{\partial f\left(x(t), y(t)\right)}{dx}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f\left(x(t), y(t)\right)}{dy}\frac{dy(t)}{dt}$$
$$\frac{\partial f}{dt}\left(x(t), y(t)\right) = \frac{\partial}{dt} arc\tan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

$$= \frac{-y(t)}{x(t)} \frac{1}{1+\frac{y^2(t)}{x^2(t)}} (-\sin t) + \frac{1}{x(t)} \frac{1}{1+\frac{y^2(t)}{x^2(t)}} (\cos t)$$

$$= \frac{y(t)\ \sin t}{x^2(t)+y^2(t)} + \frac{x(t)\ \cos t}{x^2(t)+y^2(t)} = \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t} = 1$$

3) لتكن الدالة $f: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور: $f(x) = ln(1 + x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

و النقطة c هي النقطة الصفرية أوجد $d_c\, f(x-c)$.

نحسب $x - c = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و نكتب فيكون

$$f'_{x_1}(x) = \frac{1}{1+x_1+2x_2+\cdots+nx_n} \to f'_{x_1}(0) = 1$$

$$f'_{x_2}(x) = \frac{2}{1+x_1+2x_2+\cdots+nx_n} \to f'_{x_2}(0) = 2$$

....

$$f'_{x_n}(x) = \frac{n}{1+x_1+2x_2+\cdots+nx_n} \to f'_{x_n}(0) = n$$

بالتالي نجد: $d_c\, f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} x_i = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$

4) لتكن الدالة $f: \mathfrak{R}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\} \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور: $f(x) = \|x\|^{2-n}$ حيث $n \geq 3$,

أثبت أن : $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = 0$

الحل: نكتب الدالة بالشكل : $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$

لنوجد المشتقات الأولى بالنسبة لـ x_i , $(i = 1, \dots, n)$ و هي:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{2-n}{2}(2x_i)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= (2-n)x_i(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

والمشتقات الثانية بالنسبة لـ x_i , $(i = 1, \dots, n)$ تكون

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}} - \frac{n(2-n)}{2}(2x_i)x_i(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = (2-n)\|x\|^{-n} - n(2-n)\|x\|^{-n-2}\, x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = (2-n)\|x\|^{-n}. \sum_{i=1}^{n} 1 - n(2-n)\|x\|^{-n-2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$= n(2-n)\|x\|^{-n} - n(2-n)\|x\|^{-n-2}. \|x\|^2$$

$$= n(2-n)\|x\|^{-n} - n(2-n)\|x\|^{-n} = 0$$

حيث $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

5) أثبت أن الدالة $f:\Re^2 \rightarrow \Re$ المحددة بالدستور

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

الحل: لنحسب المشتقات الأولى للدالة $f(x,y)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\,h,0\,)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0\,,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

بالتعويض في المساواة

$$f(h,k)-f(0,0)=f_x(0,0)\,h+f_y(0,0)\,k+\eta(h,k).\sqrt{h^2+k^2}$$

بحيث $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta(h,k)=0$.

فيكون $$f(h,k)-f(0,0)=h+\eta(h,k).\sqrt{h^2+k^2}$$

أي $$h\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}=h+\eta(h,k).\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\eta(h,k)=\left(h\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-h\right)\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لنوجد النهاية $$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta(h,k)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

نأخذ $h=k$ فيكون $$\lim_{h\to 0}\eta(h,h)=\lim_{k\to 0}\frac{-2h^3}{2\sqrt{2}\ h^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

أي أن الدالة f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

6) أدرس قابلية المفاضلة في النقطة $(0,0)$ للدالة $f:\Re^2 \rightarrow \Re$ المحددة بالدستور

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(يترك للطالب) .

الفصل الثالث

تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات

- مبرهنة القيمة الوسطى و مبرهنة تايلور

مبرهنة (1)القيمة الوسطى : لتكن $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\mathfrak{R}^n$. ولنفرض أن D تحوي النقطتين $c, c+h$, و القطعة المستقيمة S الواصلة بينهما.

فإذا كانت جميع المشتقات الأولى للدالة f مستمرة على D , فأن

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\ (c+\theta h) \quad , \quad 0 < \theta < 1 \qquad (12)$$

البرهان: لتكن $\varphi: [0,1] \to \mathfrak{R}$ دالة محددة بالمساواة

$$\varphi(t) = f(c+th) = c(c_1 + th_1\,, c_2 + th_2\,, \ldots, c_n + th_n\,)$$

و استناداً للعلاقة (11) وهي $\frac{d}{dx} f\big(u(x)\big) = \acute{f}\big(u(x)\big) \ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\big(u(x)\big)}{\partial u_i} \frac{du_i(x)}{dx}$

نجد أن المشتق $\acute{\varphi}(t)$ موجود و يعطى بالمساواة

$$\acute{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\ (c+th)$$

باستخدام نظرية القيمة الوسطى للدالة الحقيقية لمتغير حقيقي , فأنه يمكننا كتابة

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \ \acute{\varphi}(\theta)\ , \quad 0 < \theta < 1$$

أي $\varphi(1) - \varphi(0) = \ f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\ (c+\theta h) \ \ , \ \ 0 < \theta < 1$

و هو المطلوب.

مبرهنة (2): إذا كان للدالة $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرفة على المجموعة المفتوحة و المترابطة D من $\mathfrak{R}^n$. مشتقات أولى مستمرة في D و كان $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ على D , فأن الدالة f ثابتة .

البرهان : لدينا D مجموعة مترابطة في $\mathfrak{R}^n$, بالتالي و حسب المبرهنة (5) من الفصل الأول أنه إذا كانت a, b نقطتين من فيوجد خط مضلع و ليكن $L_1, L_2, \ldots, L_n$, رؤوسه تقع في النقاط

$a, c^1, c^2, \dots, c^{n-1}, b$ و محتوى بأكمله في D . و باستخدام المبرهنة (1) نجد

$$f(a) = f(c^1) = f(c^2) = \cdots = f(c^{n-1}) = f(b)$$

أي أن جميع قيم الدالة متساوية على D أي f دالة ثابتة .

ندرس فيما يلي الدوال الحقيقية لمتغيرين في حالة $n = 2$.

لتكن $f(x, y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\mathfrak{R}^2$, و لها مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة $m + 1$ (بما فيها $m + 1$) على D. و لتكن (a, b) , $(a + h, b + k)$ نقطتين من D بحيث تكون القطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة بأكملها في D.

لنرمز بـ $\varphi: [0,1] \to \mathfrak{R}$ للدالة محددة بالمساواة $\varphi(t) = f(a + th, b + tk)$

و حسب العلاقة : $\frac{d}{dx} f\big(u(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\big(u(x)\big)}{\partial u_i} \frac{du_i(x)}{dx}$

نجد أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $[0,1]$ و مشتقها بالنسبة لـ t هو

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt} f(a + th, b + tk)$$

$$= h\frac{\partial}{\partial x} f(a + th, b + tk) + k\frac{\partial}{\partial y} f(a + th, b + tk)$$

أن الطرف الأيمن من هذه المساواة قابلاً للاشتقاق فرضاً , لذلك نشتق الدالة φ مرة ثانية بالنسبة لـ t

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = h\left[h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th, b + tk) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + th, b + tk)\right]$$

$$+k\left[h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + th, b + tk) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th, b + tk)\right]$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th, b + tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + th, b + tk)$$

$$+ k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th, b + tk)$$

و يمكننا أن نكتبها بالشكل : $\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a + th, b + tk)$.

كذلك يمكننا ايجاد مشتق للدالة φ من المرتبة p بالنسبة لـ t فيكون

$$\frac{d^p\varphi(t)}{dt^p} = h^p \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(a+th, b+tk) + \frac{p}{1}\, h^{p-1}k \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}(a+th, b+tk) +$$

$$\dots\dots\dots \quad + \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{i!}\, h^{p-i}k^i \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i}\partial y^i}(a+th, b+tk) + \cdots\dots$$

$$\dots\dots\dots + k^p \frac{\partial^p f}{\partial y^p}(a+th, b+tk)$$

و يمكننا أن نكتبها بالشكل $\quad \frac{d^p\varphi(t)}{dt^p} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(a+th, b+tk)$

و استناداً على دستور تايلور بالنسبة للدوال الحقيقية لمتغير حقيقي يمكن كتابة التالي حيث $0 < \theta < 1$.

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\frac{d\varphi}{dt}(0) + \cdots\dots\dots + \frac{1}{m!}\frac{d^m\varphi}{dt^m}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\varphi}{dt^{m+1}}(\theta)$$

مبرهنة (3) : لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\Re^2$, و لها مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة $m+1$ (بما فيها $m+1$) على D. فإذا كانت (a,b) ,

$(a+h, b+k)$ نقطتين من D بحيث تكون القطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة بأكملها في D.

فاننا نجد الدستور :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(a,b) + R_{m+1} \qquad (13)$$

حيث باقي تايلور هو : $\quad R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$

البرهان :(تقبل دون برهان)

مبرهنة (يونغ) (4): إذا كانت f دالة تحقق الشروط الواردة في المبرهنة (3) فأن باقي تايلور يعطى بالدستور

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(a,b) + \eta(h,k).(h^2+k^2)^{\frac{m+1}{2}}$$

حيث $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$.

متسلسلة تايلور : نسمي المتسلسلة التالية بمتسلسلة تايلور للدالة $f(x,y)$ التي لها مشتقات جزئية من جميع المراتب حيث $R_{m+1} \to 0$ عندما $m \to \infty$ و هي

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i} f(a,b) \qquad (14)$$

أمثلة :

1) لتكن الدالة $f:\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = e^{x}\sin x$ أثبت أن متسلسلة تايلور لهذه دالة حول النقطة 0 هي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^{n}$, وأن هذه المتسلسلة متقاربة أيا كان x من $\mathfrak{R}$.

الحل :

لدينا معلوم $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x \ \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sin x + \cos x)$

و منه $(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$f(x) = e^{x}\sin x \qquad \Longrightarrow f(0) = e^{0}\sin 0 = 0$$

$$f'(x) = e^{x}(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\,e^{x}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f''(x) = \sqrt{2}\,e^{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,e^{x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,e^{x}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left(\sqrt{2}\right)^{2} e^{x}\sin\left(x+2.\frac{\pi}{4}\right)$$

بالتالي نجد أن $f'''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3} e^{x}\sin\left(x+3.\frac{\pi}{4}\right)$

نتابع حتى نصل الى المشتق النوني فيكون $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{n} e^{x}\sin\left(x+n.\frac{\pi}{4}\right)$

و حسب متسلسلة تايلور :

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^{n}$$

حيث $f^{(n)}(0) = \left(\sqrt{2}\right)^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

يكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^{n}$.

2) أنشر الدالة المعرفة بالمساواة $f(x) = e^{x+y}$ وفق قوى $x-2, y+2$

حسب الدستور $f(-2,2)$ $f(x-2,y+2) = f(-2,2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(-2,2)$

نضع $x = h, y = k$ ونحسب $f(-2,2) = 1$

$$f_x(x,y) = e^{x+y} \quad \Longrightarrow f_x(-2,2) = 1$$

$$f_y(x,y) = e^{x+y} \quad \Longrightarrow f_y(-2,2) = 1$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{x+y} \quad \Longrightarrow f_{xx}(-2,2) = 1$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{x+y} \quad \Longrightarrow f_{xy}(-2,2) = 1$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{x+y} \quad \Longrightarrow f_{yy}(-2,2) = 1$$

نجد أن جميع المشتقات حتى المرتبة m قيمتها عند $(2,2)$ تساوي 1.نعوض في الدستور فنجد

$$f(x-2,y+2) = e^{x+y} = 1 + \frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial f(-2,2)}{\partial x} + y\frac{\partial f(-2,2)}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2 f(-2,2)}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f(-2,2)}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f(-2,2)}{\partial y^2}\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(-2,2) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(-2,2) + \cdots$$

و منه يكون

$$f(x-2,y+2) = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x+y)^m}{m!} + \cdots$$

3) أنشر الدالة المعرفة بالمساواة $f(x,y) = e^x \sin y$ وفق متسلسلة تايلور حول النقطة $(0,0)$.

حسب الدستور: $f(0,0)$ $f(x,y) = f(0,0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(0,0)$

نسحب مشتقات الدالة حتى $i = 4$ و نضعها في الجدول التالي:

$f(x,y) = e^x \sin y$	$f(0,0) = 0$
$f_x(x,y) = e^x \sin y$	$f_x(0,0) = 0$
$f_y(x,y) = e^x \cos y$	$f_y(0,0) = 1$
$f_{xx}(x,y) = e^x \sin y$	$f_{xx}(0,0) = 0$
$f_{xy}(x,y) = e^x \cos y$	$f_{xy}(0,0) = 1$
$f_{yy}(x,y) = e^x \sin y$	$f_{yy}(0,0) = 0$
$f_{xxx}(x,y) = e^x \sin y$	$f_{xxx}(0,0) = 0$

$f_{xxy}(x,y) = e^{x}\ \cos y$	$f_{xxy}(0,0) = 1$
$f_{xyy}(x,y) = -e^{x}\ \sin y$	$f_{xyy}(0,0) = 0$
$f_{yyy}(x,y) = -e^{x}\ \cos y$	$f_{yyy}(0,0) = -1$
$f_{xxxx}(x,y) = e^{x}\ \sin y$	$f_{xxxx}(0,0) = 0$
$f_{xxxy}(x,y) = e^{x}\ \cos y$	$f_{xxxy}(0,0) = 1$
$f_{xxyy}(x,y) = -e^{x}\ \sin y$	$f_{xxyy}(0,0) = 0$
$f_{xyyy}(x,y) = -e^{x}\ \cos y$	$f_{xyyy}(0,0) = -1$
$f_{yyyy}(x,y) = \ e^{x}\ \sin y$	$f_{yyyy}(0,0) = 0$

نعوض في منشور تايلور في النقطة $(0,0)$

$$f(x,y) = f(0,0) + \tfrac{x}{1!} f_x(0,0) + \tfrac{y}{1!} f_y(0,0)$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(x^2 f_{xx}(0,0) + 2xy f_{xy}(0,0)\ + y^2 f_{yy}(0,0)\right)$$

$$+\tfrac{1}{3!}\left(x^3 f_{xxx}(0,0) + 3x^2 y f_{xxy}(0,0) + 3xy^2 f_{xyy}(0,0)\ + y^3 f_{yyy}(0,0)\right)$$

$$+\tfrac{1}{4!}\Big(x^4 f_{x^4}(0,0) + 4x^3 y f_{x^3y}(0,0) + 6x^2y^2 f_{x^2y^2}(0,0) +$$

$$4x\,y^3 f_{xy^3}(0,0)\quad + \ y^4 f_{y^4}(0,0)\Big) + \cdots$$

فيكون

$$f(x,y) = 0 + \tfrac{1}{1!} y + \tfrac{1}{2!}\ 2xy + \tfrac{1}{3!}(\ 3x^2y - y^3) + \tfrac{1}{4!}(\ 4x^3y - 4xy^3) + \cdots$$

$$f(x,y) = y + xy + \frac{1}{3!}(\ 3x^2y - y^3) + \frac{1}{4!}(\ 4x^3y - 4xy^3) + \cdots$$

4) أنشر الدالة المعرفة بالمساواة $f(x,y) = e^{x}\ \cos y$ وفق متسلسلة تايلور حول النقطة $(0,0)$.

حسب الدستور: $f(x,y) = f(0,0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i} f(0,0)$

نسحب مشتقات الدالة حتى $i = 4$ و نضعها في الجدول التالي:

$f(x,y) = e^x \cos y$	$f(0,0) = 1$
$f_x(x,y) = e^x \cos y$	$f_x(0,0) = 1$
$f_y(x,y) = -e^x \sin y$	$f_y(0,0) = 0$
$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y$	$f_{xx}(0,0) = 1$
$f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y$	$f_{xy}(0,0) = 0$
$f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y$	$f_{yy}(0,0) = -1$
$f_{xxx}(x,y) = e^x \cos y$	$f_{xxx}(0,0) = 1$
$f_{xxy}(x,y) = -e^x \sin y$	$f_{xxy}(0,0) = 0$
$f_{xyy}(x,y) = -e^x \cos y$	$f_{xyy}(0,0) = -1$
$f_{yyy}(x,y) = e^x \sin y$	$f_{yyy}(0,0) = 0$
$f_{xxxx}(x,y) = e^x \cos y$	$f_{xxxx}(0,0) = 1$
$f_{xxxy}(x,y) = -e^x \sin y$	$f_{xxxy}(0,0) = 0$
$f_{xxyy}(x,y) = -e^x \cos y$	$f_{xxyy}(0,0) = -1$
$f_{xyyy}(x,y) = e^x \sin y$	$f_{xyyy}(0,0) = 0$
$f_{yyyy}(x,y) = e^x \cos y$	$f_{yyyy}(0,0) = 1$

نعوض في منشور تايلور في النقطة $(0,0)$. فنجد

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}(x^2 - y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{4!}(\ x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + ..$$

- **القيم العظمى و الصغرى النسبية:**

تعريف : لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية D من $\mathfrak{R}^n$. نقول عن نقطة c من D, أنها نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f, إذا وجد جوار U للنقطة c محتوى في D بحيث يكون $f(x) \leq f(c)$ أيا كان x من U.

و نقول عن نقطة c أنها نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f, إذا وجد جوار U للنقطة c محتوى في D بحيث يكون $f(x) \geq f(c)$ أيا كان x من U.

نستنتج من التعريف أنه إذا كانت c نقطة قيمة عظمى نسبية أو صغرى نسبية للدالة f, فإن c نقطة داخلية لمجموعة تعريف الدالة D. كذلك إذا كانت c نقطة قيمة عظمى نسبية أو صغرى نسبية للدالة f, فإننا نقول عن c أنها نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f.

مبرهنة (5) : لتكن $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^n$.
و لتكن النقطة الداخلية $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f, فإذا كانت كل المشتقات الأولى للدالة f موجودة في c عندئذ يكون من أجل $i = 1,2, \dots, n$

$$\frac{\partial f(c)}{\partial x_i} = 0 \qquad (15)$$

البرهان: لنأخذ الدالة الحقيقية φ_1 للمتغير الحقيقي x_1 المعرفة بالدستور

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_1(x_1, c_2, \dots, c_n)$$

و التي ساحتها هي مجموعة الأعداد الحقيقية x_1 بحيث تكون النقطة $(x_1, c_2, \dots, c_n)$ واقعة في الجوار U محتواة في D . لما كانت $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f, فأن النقطة c_1 هي نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة الحقيقية φ_1 للمتغير الحقيقي x_1 , و هذا يعني استناداً لمبرهنة القيم القصوى للدوال الحقيقية لمتغير حقيقي واحد أن : $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(c_1) = 0$

أي $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$

و باختيار الدوال $\varphi_2(x_2), \varphi_3(x_3), \dots, \varphi_n(x_n)$ بصورة مناسبة , فاننا نجد بصورة مماثلة أن

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(c_2) = 0, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(c_n) = 0$$

أي أن $\frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)$ و هو المطلوب .

يسمى كل حل c يحقق جملة المعادلات (15) نقطة حرجة للدالة f.

وتبين المبرهنة (5) أنه إذا وجد للدالة f مشتقات أولى في كل نقطة داخلية من مجموعة تعريف f فأن أي نقطة قيمة قصوى نسبية c للدالة f هي نقطة حرجة للدالة f. لكن العكس غير صحيح دائماً ,

أي أنه ليس من الضروري أن تكون كل نقطة حرجة للدالة f هي نقطة قيمة قصوى نسبية لهذه الدالة . نبين ذلك في المثال التالي:

مثال : لتكن الدالة $f: \Re^2 \to \Re$ المحددة بالدستور $f(x, y) = xy$

نجد أن المبدأ $(0,0)$ هو نقطة حرجة للدالة f لأن $f_x(0,0) = 0,\ f_y(0,0) = 0$

بما أن $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ عندما $xy > 0$

و $f(x,y) < 0 = f(0,0)$ عندما $xy < 0$

يترتب على هذا أنه إذا أخذنا أي جوار U للنقطة $(0,0)$ فهنالك نقاط (x,y) في هذا الجوار تحقق الشرط $f(x,y) > f(0,0)$, و نقاط أخرى تحقق الشرط $f(x,y) < f(0,0)$, و يعني تعريفاً أن النقطة الحرجة $(0,0)$ للدالة f لا يمكن أن تكون نقطة قيمة قصوى نسبية لهذه الدالة.

مبرهنة (6): (القيم القصوى النسبية لدالة في متغيرين)

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية D من $\Re^2$. ولنفترض أنه يوجد لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية على D . و لتكن(a,b) نقطة حرجة للدالة f في D,

و لنرمز بـ Δ للمعين $$\Delta= \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b)$$

فأننا نجد ما يلي:

1. إذا كان $\Delta < 0$ و كان $f_{xx}(a,b) > 0$, فأن (a,b) نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f .
2. إذا كان $\Delta < 0$ و كان $f_{xx}(a,b) < 0$, فأن (a,b) نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f .
3. أما إذا كان $\Delta > 0$ فأن (a,b) ليست نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f .
4. وإذا كان $\Delta = 0$ فقد تكون (a,b) نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f و قد لا تكون.

البرهان: (بدون برهان)

مثال (1) : لتكن الدالة $f : \Re^2 \rightarrow \Re$ المحددة بالدستور $f_x(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$

حدد فيما إذا كانت هذه الدالة تحدد نقطة قيمة قصوى نسبياً.

الحل: نحسب

$$f_x(x,y) = -2x\,(y-2x^2) - 4x(y-x^2) = -6xy + 8x^3 = 0$$

$$f_y(x,y) = y - 2x^2 + y - x^2 = 2y - 3x^2 = 0$$

بذلك نجد أن النقطة $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f . كذلك نحسب

$$f_{xx}(x,y) = -6\,y + 24x^2 \quad , f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6x \ , f_{yy}(x,y) = 2$$

و منه

$$f_{xx}(0,0) = 0 \quad , f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) \ = 0 \ \ , f_{yy}(0,0) = 2$$

فيكون المعين $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(0,0) & f_{xx}(0,0) \\ f_{yy}(0,0) & f_{xy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

نجد أنه توجد نقاط $(x,y) \in \Re^2$ يكون فيها $x^2 < y < 2x^2$ و تحقق $f(x,y) < f(0,0)$.

و توجد نقاط $(x,y) \in \Re^2$ يكون فيها $x^2 < 2x^2 < y$ و تحقق $f(x,y) > f(0,0)$.

بالتالي تكون النقطة $(0,0)$ لا تشكل قيمة قصوى نسبية للدالة f .

مثال (2) : لتكن الدالة $f: \Re^2 \to \Re$ المحددة بالدستور: $f_x(x,y) = x^2 - x^4 - y^4$

حدد فيما إذا كانت هذه الدالة تحدد نقطة قيمة قصوى نسبياً.

الحل: نحسب

$$f_x(x,y) = 2x - 4x^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \ , x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y(x,y) = -4y^3 = 0 \quad \Longrightarrow \ y = 0$$

بذلك نجد أن النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ هي نقطة حرجة للدالة f . كذلك نحسب

$$f_{xx}(x,y) = 2 - 12x^2 \quad , f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \ = 0 \ \ , f_{yy}(x,y) = -12y^2$$

و منه $f_{xx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -4 \quad , f_{xy}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = f_{yx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \ = 0 \ \ , f_{yy}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$

فيكون المعين $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(0,0) & f_{xx}(0,0) \\ f_{yy}(0,0) & f_{xy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

نجد أن : $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ومنه تكون جميع نقاط $(x,y) \in \Re^2$ تحقق $\frac{1}{4} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \ge f(x,y)$.

أي أن النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ هي نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f .

مثال (3): أوجد أقصر مسافة بين المستقيمين :

$$L_1 = \{(x,y,z) : x = 2-t \,, y = 3+t \;\;, z = 1-2t \;\}$$

$$L_2 = \{(x,y,z) : x = 1-s \,, y = 2-s \;\;, z = 3+s \;\}$$

الحل : البعد بين نقطتين (x_2, y_2, z_2) , (x_1, y_1, z_1) من المستقيمين L_1 و L_2 بدلالة s,t هو :

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$L = \sqrt{(2-t-1+s)^2 + (3+t-2+s)^2 + (1-2t-3-s)^2}$$

$$L^2 = f(s,t) = (1+s-t)^2 + (1+s+t)^2 + (2+s+2t)^2$$

$$L^2 = f(s,t) = 3s^2 + 6t^2 + 8s + 8t + 4st + 6$$

لنوجد النقطة الحرجة للدالة $f(s,t)$

$$f_s(s,t) = 6s + 4t + 8 = 0 \;\;,\;\; f_t(s,t) = 12t + 4s + 8 = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن $(s,t) = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ هي نقطة حرجة لـ $f(s,t)$. ثم نحسب

$$f_{ss}(s,t) = 6 > 0 \;\;, f_{st}(s,t) = 4 \;\;,\;\; f_{tt}(s,t) = 12$$

و أن $\Delta= \begin{vmatrix} f_{st}(0,0) & f_{ss}(0,0) \\ f_{tt}(0,0) & f_{st}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 72 = -56 \; < 0$

بالتالي النقطة $(s,t) = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ هي نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة $f(s,t)$

نعوض بالعلاقة التالية :

$$L^2 = f(s,t) = 3s^2 + 6t^2 + 8s + 8t + 4st + 6$$

$$L^2 = f\left(\frac{-8}{7}, \frac{-2}{7}\right) = 3\left(\frac{-8}{7}\right)^2 + 6\left(\frac{-2}{7}\right)^2 + 8\left(\frac{-8}{7}\right) + 8\left(\frac{-2}{7}\right) + 4\left(\frac{16}{49}\right) + 6$$

$$L^2 = \frac{192+24-448-112+64+294}{49} = \frac{14}{49}$$

فتكون أقصر مسافة بين المستقيمين هي $L = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

مثال (4): أوجد أقصر مسافة بين النقطة $p(2,2,3)$ والمستوي الذي معادلته : $2x + y - 2z = 6$.

الحل : نكتب معادلة البعد النقطة (x, y, z) من المستوي عن النقطة $p(2,2,3)$ هي :

$$L = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2}$$

حيث نحصل من معادلة المستوي على $z = x + \frac{1}{2}y - 3$ أو $z + 3 = x + \frac{1}{2}y$ و نشكل الدالة

$$L^2 = f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2$$

$$L^2 = f(x,y) = 2x^2 + \frac{5}{4}y^2 - 4x + xy - 4y + 8$$

لنوجد النقطة الحرجة للدالة $f(s,t)$

$$f_x(x,y) = 4x + y - 4 = 0 \ , \ f_y(x,y) = x + \frac{5}{2}y - 4 = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن $(s,t) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ هي نقطة حرجة لـ $f(x,y)$. ثم نحسب

$$f_{xx}(x,y) = 4 > 0 \ , f_{xy}(x,y) = 1 \ , \ f_{yy}(x,y) = \frac{5}{2}$$

و أن $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) & f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ f_{yy}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) & f_{xy}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = -9 < 0$

بالتالي النقطة $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ هي نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة $f(x,y)$

نعوض بالعلاقة التالية :

$$L^2 = f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2$$

$$L^2 = f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

فتكون أقصر مسافة بين النقطة $p(2,2,3)$ والمستوي هي $L = 2$.

- **الدوال الضمنية:**

لتكن $F(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\Re^2$, و لننظر في تلك النقاط (x,y) الواقعة في D و التي تحقق المعادلة: $F(x,y)=0$ (16)

فاذا قابل كل قيمة للمتغير x واقعة في مجال ما I قيمة واحدة فقط للمتغير y , بحيث تحقق النقطة (x,y) من D المعادلة (16), فأنها تتشكل دالة $f: I \rightarrow \Re$ بحيث تكون المساواة $F(x,f(x))=0$ مطابقة أيا كانت x من I .

و على سبيل المثال, فإذا أخذنا المعادلة : $4x^2+y^2-1=0$ (17)

فمن الواضح أنها تحدد دالتين معرفتين على المجال $I=\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ و هما

$$y=f_1(x)=\sqrt{1-4x^2}\ ,\ y=f_2(x)=-\sqrt{1-4x^2}$$

و من الواضح أنه إذا عوضنا أيا من هاتين المعادلتين $f_1(x)\,,f_2(x)$ في (17) نحصل على مطابقة .

لا أن الأمر ليس دوماً بهذه البساطة . فمثلاً إذا أخذنا المعادلة :

$$2x^5y^{15}+7x^2y^7-3x^8y^6-6=0$$

فأن التعبير عن حلول y بدلالة x تحليلياً أمر غير ممكن (في حال وجود هذه الحلول طبعاً) , رغم وجود $y=f(x)$ حل لهذه المعادلة.

تعريف : تسمى الدالة $y=f(x)$ ضمنية إذا كانت معطاه بالمعادلة $F(x,y)=0$ و غير المحلولة بالنسبة لـ y. و تسمى دالة ظاهرة , إذا استطعنا التعبير عن yمباشرة بدلالة x و ذلك بحل المعادلة $F(x,y)=0$ بالنسبة لـ y.

تعريف : لتكن $F(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\Re^2$. نقول أن المعادلة $F(x,y)=0$ تحدد دالة ضمنية $y=f(x)$ في مستطيل R المحتوى في D و المعرف بالمتراجحتين

$$|x-x_0|<\delta\quad ,|y-y_0|<\delta' \tag{18}$$

إذا قابل كل نقطة x في المجال $]x_0-\delta,x_0+\delta[$ جذر واحد $y=f(x)$, في المجال $]y_0-\delta',y_0+\delta'[$ للمعادلة $F(x,y)=0$.

مبرهنة (7): (الدالة الضمنية لمتغير واحد)

لتكن $F(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\Re^2$. و لنفرض تحقق الشروط التالية:

1) يوجد للدالة F مشتقان أولان في جوار ما لنقطة (x_0,y_0) من D, وهذان المشتقان مستمران في (x_0,y_0).

2) $F(x_0,y_0)=0$

3) $F_y(x_0,y_0)=0$. عندئذ :

a) يوجد مستطيل R في D محدد بالمتراجحتين $|y-y_0|<\delta'$, $|x-x_0|<\delta$, بحيث يقابل كل نقطة x في المجال $]x_0-\delta,x_0+\delta[$ حل وحيد $y=f(x)$ للمعادلة $F(x,y)=0$ يحقق الشرط $|y-y_0|<\delta'$

b) أن قيمة الدالة f في النقطة x_0 هي y_0 , أي أن $y_0=f(x_0)$.

c) أن الدالة f مستمرة على $]x_0-\delta,x_0+\delta[$.

d) يوجد للدالة f مشتق مستمرة على مجال $]x_0-\delta,x_0+\delta[$, و هذا المشتق يعطى بالدستور:

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))} \qquad (19)$$

البرهان : (بدون برهان).

مبرهنة (8): (الدالة الضمنية لعدة متغيرات)

لتكن $F(x,y)=F(x_1,\dots,x_n,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D من $\Re^{n+1}$,

و لنفرض تحقق الشروط التالية:

4) يوجد للدالة F مشتقات أولى في جوار ما لنقطة (x^0,y^0) من D, وهذان المشتقات مستمرة في (x^0,y^0) .

5) $F(x^0,y^0)=0$

6) $F_y(x^0,y^0)=0$

عندئذ :

a) يوجد مستطيل R في الفضاء الأقليدي $\Re^{n+1}$ محتوى في D محدد بالمتراجحات

$$|x_i-x_i^0|<\delta \quad , \quad 1\le i\le n \qquad (20)$$

$$|y-y^0|<\delta' \qquad (21)$$

بحيث يقابل كل نقطة x تحقق الشروط (20) حل للمعادلة $F(x, y) = 0$ يحقق المتراجحة (21)

b) أن قيمة الدالة f في النقطة x^0 هي y^0 , أي أن $y^0 = f(x^0)$.

c) أن الدالة f مستمرة في كل نقطة x تحقق الشروط (20).

d) يوجد للدالة f مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة x تحقق الشروط (20), و هذه المشتقات تعطى بالدساتير:

$$\frac{\partial f\ (x)}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad (1 \le i \le n) \qquad (22)$$

البرهان : (بدون برهان).

ندرس الآن الحالة العامة حيث نعطي جملة من m معادلة لـ $n + m$ من المتغيرات :

$$\begin{aligned} F_1(x, u) &= F_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots u_m) = 0 \\ F_2(x, u) &= F_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots u_m) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, u) &= F_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots u_m) = 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

و يطرح السؤال هنا إذا كان بالامكان ايجاد m من المتغيرات و هي $u_1, \dots u_m$ كدوال ضمنية لـ n من المتغيرات على الشكل

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad (24)$$

بحيث إذا تم تعويض (24) في (23) يؤدي الى متطابقات بالنسبة الى $x_1, \dots, x_n$ عددها m .

نكتفي بدراسة الدوال الضمنية لعدة متغيرات في حالة $n = 3, m = 2$. أي مسألة وجود حل u, v على شكل دالتين للمتغيرات x, y, z للمعادلتين $F(x, y, z, u, v) = 0$, $G(x, y, z, u, v) = 0$

سنعرف لهذا الغرض معين اليعقوبي J للدالتين F, G بالنسبة لـ u, v كما يلي:

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

مبرهنة (9) : لتكن $F(x,y,z;u,v), G(x,y,z;u,v)$ دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعة المفتوحة D من $\Re^5$. و لنفرض تحقق الشروط التالية:

1) يوجد للدالتين F,G مشتقات أولى في جوار للنقطة (x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) من D, وهذه المشتقات مستمرة في (x_0,y_0,z_0,u_0,v_0).

2) $F(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=0\ ,G(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=0$

3) $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}|_{(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)}\neq 0$

عندئذ :

a) يوجد مستطيل R في الفضاء الاقليدي $\Re^5$ محتوى D محدد بالمتراجحات

$$|x-x_0|<\delta\ \ ,\ \ |y-y_0|<\delta\ ,\ \ |z-z_0|<\delta \qquad (25)$$

$$|u-u_0|<\delta'\ ,|v-v_0|<\delta'' \qquad (26)$$

بحيث يقابل كل نقطة (x,y,z) تحقق الشروط (25) حل وحيد $u=f(x,y,z)\ ,v=g(x,y,z)$ للمعادلتين $F(x,y,z,u,v)=0\ ,G(x,y,z,u,v)=0$ يحقق الشرطين (26)

b) $u=f(x_0,y_0,z_0)\ ,v=g(x_0,y_0,z_0)$

c) تكون الدالتين f,g مستمرتين في كل نقطة (x,y,z) تحقق (25).

d) يوجد للدالتين f,g مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة (x,y,z) تحقق الشروط (25) و هذا المشتقات تعطى بالدساتير:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_z & F_v\\ G_z & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_z\\ G_u & G_z\end{vmatrix}$$

البرهان : (بدون برهان)

سيتم استخدام هذه المبرهنة في ايجاد دوال ضمنية للمعادلتين $F = 0, G = 0$ و ايجاد مشتقات هذه الدوال الضمنية في نقطة ما $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$.

مثال (5) : أثبت أن جملة المعادلتين التاليتين:

$$F(x, y, z; u, v) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + u^2 + v - 6 = 0$$
$$G(x, y, z; u, v) = 2x^3 + 4y^2 + 2z^2 + u + v^2 - 9 = 0$$

تعرف دالتين $u = f(x, y, z), v = g(x, y, z)$ بصورة وحيدة في جوار للنقطة $(1, -1, 0, -1, 2)$ أوجد المشتقات الأولى بالنسبة لـ x, y, z .

الحل: نطبق شروط المبرهنة (9)

1) يوجد للدالتين F, G مشتقات أولى في جوار للنقطة $(1, -1, 0, -1, 2)$ من $\Re^5$, وهذه المشتقات مستمرة في $(1, -1, 0, -1, 2)$.

2)
$$F\big((1, -1, 0, -1, 2)\big) = 1 + 2 + 0 + 1 + 2 - 6 = 0$$
$$G\big((1, -1, 0, -1, 2)\big) = 2 + 4 + 0 - 1 + 4 - 9 = 0$$

3)
$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

عندئذ :

a) يوجد مستطيل R في الفضاء الاقليدي $\Re^5$ محتوى D محدد بالمتراجحات

$$|x - 1| < \delta \ , \ |y + 1| < \delta \ , \ |z| < \delta \qquad (1)$$
$$|u + 1| < \delta' \ , |v - 2| < \delta'' \qquad (2)$$

بحيث يقابل كل نقطة (x, y, z) تحقق الشروط (1) حل وحيد $u = f(x, y, z) \ , v = g(x, y, z)$ للمعادلتين $F = 0 \ , G = 0$ يحقق الشرطين (2).

b) و هاتان الدالتان تحققان $u = f(1, -1, 0) = -1 \ , v = g(1, -1, 0) = 2$

c) تكون الدالتين f, g مستمرتين في كل نقطة (x, y, z) تحقق (1).

d) يوجد للدالتين f, g مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة (x, y, z) تحقق الشروط (1) و قيمة هذه المشتقات في النقطة $(1, -1, 0, -1, 2)$ و هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 6x^2 & 2v \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 4y & 1 \\ 8y & 2v \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-8}{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} F_z & F_v \\ G_z & G_v \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 6z & 1 \\ 4z & 2v \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2u & 2x \\ 1 & 6x^2 \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-14}{9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2u & 4y \\ 1 & 8y \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = \frac{20}{9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} F_u & F_z \\ G_u & G_z \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2u & 6z \\ 1 & 4z \end{vmatrix}_{|(1,-1,0,-1,2)} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (6) : أثبت أن جملة المعادلتين التاليتين:

$$F(x,y;u,v) = u^2 + v^2 - x^2 - y^2 = 0$$
$$G(x,y;u,v) = u + v - x^2 + y = 0$$

تعرف دالتين $u = f(x,y), v = g(x,y)$ بصورة وحيدة في جوار للنقطة $(2,1,1,2)$

أوجد المشتقات الأولى بالنسبة لـ x, y .

الحل: نطبق شروط المبرهنة (9)

4) يوجد للدالتين F, G مشتقات أولى في جوار للنقطة $(2,1,1,2)$من $\Re^4$, وهذه المشتقات مستمرة في $(2,1,1,2)$

5) $$F(2,1,1,2) = 1 + 4 - 4 - 1 = 0$$
$$G(2,1,1,2) = 1 + 2 - 4 + 1 = 0$$

6) $$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{|(2,1,1,2)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

عندئذ :

a) يوجد مستطيل R في الفضاء الاقليدي $\Re^4$ محتوى D محدد بالمتراجعات

$$(1) \qquad |x-2|<\delta \quad , \quad |y-1|<\delta$$

$$(2) \qquad |u-1|<\delta' \, , |v-2|<\delta''$$

بحيث يقابل كل نقطة (x,y) تحقق الشروط (1) حل وحيد $u=f(x,y)\,, v=g(x,y)$

للمعادلتين $F=0\,, G=0$ يحقق الشرطين (2).

b) و هاتان الدالتان تحققان $u=f(2,1)=2 \ , v=g(2,1)=1$

c) تكون الدالتين f,g مستمرتين في كل نقطة (x,y,z) تحقق (1).

d) يوجد للدالتين f,g مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة (x,y) تحقق الشروط (1) و قيمة هذه المشتقات في النقطة (2,1,1,2) و هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2x & 2v\\ -2x & 1\end{vmatrix}_{(2,1,1,2)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -4 & 1\end{vmatrix}=\frac{12}{6}=6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2y & 2v\\ 1 & 1\end{vmatrix}_{(2,1,1,2)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{-6}{2}=-3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2u & -2x\\ 1 & -2x\end{vmatrix}_{(2,1,1,2)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -4\end{vmatrix}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2u & -2y\\ 1 & 1\end{vmatrix}_{(2,1,1,2)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{4}{2}=2$$

بذلك حسبنا قيمة المشتقات الأولى للدالتين f,g في النقطة (2,1,1,2).

انتهت المحاضرات